Chapter -3-

Dynamic of a Particle.

General Motion

(1) grad $(\phi + \psi)$

$$\nabla(\phi + \psi) = \nabla\phi + \nabla\psi$$

الأستاذ المساعد
فراس محمود هادي

(2) div $(\vec{A} + \vec{B})$

$$\nabla \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla \cdot \vec{B}$$

(3) curl $(\vec{A} + \vec{B})$

$$\nabla \times (\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \vec{B}$$

(4) $$\nabla \cdot (\phi \vec{A}) = (\nabla\phi) \cdot \vec{A} + \phi(\nabla \cdot \vec{A})$$

(5) $$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A}(\nabla \times \vec{B})$$

(6) div grad ϕ

$$\nabla \cdot (\nabla\phi) = \nabla^2\phi = \frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d^2\phi}{dy^2} + \frac{d^2\phi}{dz^2}$$

(7) curl grad ϕ

$$\nabla \times (\nabla\phi) = \text{zero}$$

(8) div curl $\vec{A}$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \text{zero}$$

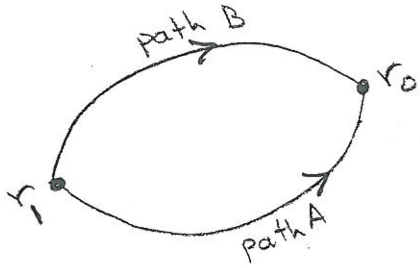
الأستاذ المساعد
فراس محمود هادي

(9) $$\nabla = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

"Conservation Forces" القوى المحافظة

The conditions of conservation force :-

(1) if the work is not depended for the path the Force is conservation and its field called <u>conservation field</u>.



* W_A الشغل اللازم لنقل جسم من r_1 الى r_0 على المسار A

$$W_A = \int_{r_1}^{r_0} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

* W_B = = = = على المسار B

$$W_B = \int_{r_1}^{r_0} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$W_{path\,A} = W_{path\,B}$$

$$\int_{r_1}^{r_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_0} \vec{F} \cdot dr$$

$$\int_{r_1}^{r_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{r_1}^{r_0} \vec{F} \cdot dr = 0$$

$$\int_{r_1}^{r_0} \vec{F} \cdot dr + \int_{r_0}^{r_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

(2) $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ الشرط الثاني من شروط القوة المحافظة

اذا كان التكامل الخطي للقوة حول مسار مغلق يساوي صفر تكون القوة محافظة.

الأستاذ المساعد
فراس محمود هادي

(3) if $\vec{F} = -\nabla V$

اذا كانت القوة تساوي سالب انحدار الجهد تكون القوة محافظة

(4) if $\nabla \times \vec{F} = 0$ then the force is Conservation

(5) if $E = K.E + P.E = \text{constant}$ then the force is conservation

ex)

$$F = \hat{i}(y^2 z^3 - 6xz^2) + \hat{j}(2xyz^3) + \hat{k}(3xy^2z^2 - 6x^2z)$$

show that if the force is conservation or no?

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \hat{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

$$= \hat{i}(6xyz^2 - 6xyz^2) + \hat{j}[(3y^2z^2 - 12xz) - (3y^2z^2 - 12xz)] + \hat{k}(2yz^3 - 2yz^3)$$

$= \text{Zero}$

∴ القوة محافظة

ex) if $V = x^2 + yx + xz$ Find the force field?

$$\vec{F} = -\nabla V = -\hat{i}\frac{\partial V}{\partial x} - \hat{j}\frac{\partial V}{\partial y} - \hat{k}\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\vec{F} = -\hat{i}(2x + y + z) - \hat{j}x - \hat{k}x$$

ex) show that if the Force is conservation or no?

$$\vec{F} = \hat{i}xy + \hat{j}xz + \hat{k}yz$$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & xz & yz \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(z - x) - \hat{j}(0) + \hat{k}(z - x). \neq 0$$

∴ النتيجة لا تساوي صفر . فالقوة غير محافظة

ex) when the force field is conservation?

$$\vec{F} = \hat{i}(ax + by^2) + \hat{j}cxy$$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ax + by^2 & cxy & 0 \end{vmatrix} = \hat{k}(c - 2b)y$$

if the Force is conservation then $\nabla \times \vec{F} = 0$

$$\therefore c - 2b = 0 \Rightarrow \boxed{c = 2b}$$

٣

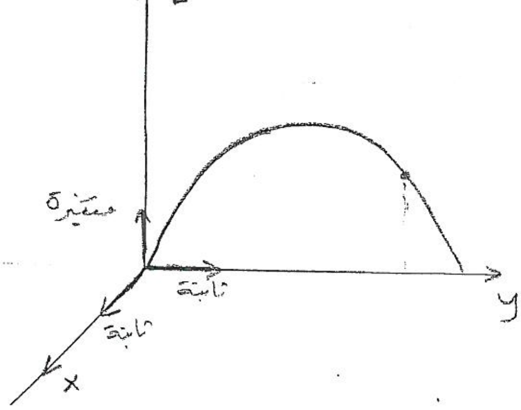
* Motion of a projectile in a Uniform Gravitational Field

① No Air Resistance

For a projectile there is only one force acting namely the force of gravity and equal the weight.

اذا كانت القوة الوحيدة المؤثرة على الجسم
هي قوة الجاذبية التي تساوي وزن الجسم مثال
ان الجسم يسقط سقوطاً حراً .

the differential equation of motion:.



$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -mg\hat{k}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -g\hat{k}$$

بما ان المعادلة الاخيرة لا تحتوي على الكتلة (m) فان حركة الجسم الساقط سقوطاً حراً لا تعتمد
على الكتلة .

the force function is clearly of the separable type and is also conservative.

From Force Conservation Law,

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgz \quad] * \frac{2}{m}$$

$$v^2 = v_0^2 - 2gz \qquad —(1)$$ سرعة القذيفة في اية لحظة
وهي نفس معادلة الحركة الخطية

الأستاذ المساعد
فراس محمود هادي

من المعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -g\hat{k} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = -g\hat{k}\,t$$

$$d\vec{v} = -g\vec{k}\int dt \Rightarrow \vec{V} = -gt\hat{k} + \text{Const}$$

$$\text{if } t=0 \;\; \therefore v = v_0 \;,\; \therefore \text{Const} = v_0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{V} = v_0 - gt\hat{k} \\ v = v_0 - gt \end{array}} \Rightarrow (2)$$

تشبه معادلة الحركة الخطية

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_0 - gt\hat{k}$$

$$\int d\vec{r} = \int \vec{v}_0\,dt - g\int t\,dt\,\hat{k}$$

$$r = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2\hat{k} \quad \text{———} \quad (3)$$

وهي تشبه معادلة الحركة الخطية

$$\therefore \quad x = \dot{x}_0 t$$

$$y = \dot{y}_0 t$$

$$z = \dot{z}_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

الأستاذ المساعد
فراس محمود هادي

٤

Linear Air Resistance :-

The differential equation is :-

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -mg\hat{k} - c\vec{v}$$

$$m(\hat{i}\ddot{x} + \hat{j}\ddot{y} + \hat{k}\ddot{z}) = -mg\hat{k} - c(\hat{i}\dot{x} + \hat{j}\dot{y} + \hat{k}\dot{z})$$

$$\therefore \quad m\ddot{x} = -c\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} = \frac{-c}{m}\dot{x}$$

$$(\ddot{x} = -\gamma\dot{x}) \quad ----(1)$$

where $\gamma = \frac{c}{m}$

$$\therefore \quad m\ddot{y} = -c\dot{y} \Rightarrow \ddot{y} = \frac{-c}{m}\dot{y}$$

$$(\ddot{y} = -\gamma\dot{y}) \quad ----(2)$$

$$\therefore \quad m\ddot{z} = -mg - c\dot{z}$$

$$(\ddot{z} = -\gamma\dot{z} - g) \quad ---(3)$$

to find the velocity in (x) direction

$$\ddot{x} = -\gamma\dot{x} \quad ---- (1)$$

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -\gamma\dot{x}$$

$$\int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -\gamma\int_0^t dt$$

$$\ln\frac{\dot{x}}{\dot{x}_0} = -\gamma t$$

$$(\dot{x} = \dot{x}_0 e^{-\gamma t}) \quad ----- (1')$$

الأستاذ المساعد
فراس محمود هادي

From eq. (2)

$$\ddot{y} = -\gamma \dot{y} \Rightarrow \frac{d\dot{y}}{dt} = -\gamma \dot{y} \Rightarrow \int_{\dot{y}_0}^{\dot{y}} \frac{d\dot{y}}{\dot{y}} = -\gamma \int_0^t dt$$

$$\ln \frac{\dot{y}}{\dot{y}_0} = -\gamma t$$

$$\left(\dot{y} = \dot{y}_0 \, e^{-\gamma t} \right) \text{------} (2')$$

From eq. (3)

$$\frac{d\dot{z}}{dt} = -\gamma \dot{z} - g \Rightarrow \int_{\dot{z}_0}^{\dot{z}} \frac{d\dot{z}}{-\gamma \dot{z} - g} = \int_0^t dt$$

$$\frac{1}{-\gamma} \int_{\dot{z}_0}^{\dot{z}} \frac{-\gamma \, d\dot{z}}{-\gamma \dot{z} - g} = \int_0^t dt$$

$$\ln \frac{(-\gamma \dot{z} - g)}{(-\gamma \dot{z}_0 - g)} = -\gamma t$$

$$\ln \frac{\gamma \dot{z} + g}{\gamma \dot{z}_0 + g} = -\gamma t$$

الأستاذ المساعد
فراس محمود هادي

$$\gamma \dot{z} + g = (\gamma \dot{z}_0 + g) \, e^{-\gamma t}$$

$$\left(\dot{z} = \frac{-g}{\gamma} + \left(\dot{z}_0 + \frac{g}{\gamma} \right) e^{-\gamma t} \right) \text{----} (3')$$

الأستاذ المساعد
فراس محمود هادي

* to Find the position Components From eq. (1')

$$\dot{x} = \dot{x}_0\, e^{-\gamma t} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \dot{x}_0\, e^{-\gamma t}$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t \dot{x}_0\, e^{-\gamma t}\, dt \quad \Big]\, \frac{-\gamma}{-\gamma}$$

$$x\Big]_{x_0}^{x} = \frac{\dot{x}_0}{-\gamma} \int_0^t e^{-\gamma t} (-\gamma)\, dt \Rightarrow x - x_0 = \frac{-\dot{x}_0}{\gamma} \left[e^{-\gamma t} \right]_0^t$$

اذا كان الموقع الابتدائي في نقطة الاصل

$$x = \frac{-\dot{x}_0}{\gamma} \left[e^{-\gamma t} - 1 \right]$$

$$x = \frac{\dot{x}_0}{\gamma} \left[1 - e^{-\gamma t} \right] \quad ---- (1'')$$

وبنفس الطريقة نجد (y)

$$y = \frac{\dot{y}_0}{\gamma} \left(1 - e^{-\gamma t} \right) \quad ----- (2'')$$

ولايجاد (z) نأخذ المعادلة (3)

$$\dot{z} = \frac{-g}{\gamma} + \left(\frac{g}{\gamma} + \dot{z}_0 \right) e^{-\gamma t} = \frac{dz}{dt}$$

$$\int_{z_0}^{z} dz = \frac{-g}{\gamma} \int_0^t dt + \left(\frac{g}{\gamma} + \dot{z}_0 \right) \int_0^t e^{-\gamma t}\, dt$$ نضرب ونقسم $(-\gamma)$

$$z - z_0 = \frac{-g}{\gamma} t + \left(\frac{1}{-\gamma} \right) \left(\frac{g}{\gamma} + \dot{z}_0 \right) \int_0^t e^{-\gamma t} (-\gamma)\, dt$$

عند نقطة الاصل $z_0 = zero$

$$z = \frac{-g}{\gamma} t - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{g}{\gamma} + \dot{z}_0 \right) e^{-\gamma t} \Big]_0^t$$

$$z = \frac{-g}{\gamma} t - \left(\frac{g}{\gamma^2} - \frac{\dot{z}_0}{\gamma} \right) \left[e^{-\gamma t} - 1 \right]$$

$$z = \frac{-g}{\gamma} t + \left(\frac{g}{\gamma^2} + \frac{\dot{z}_0}{\gamma} \right) \left(1 - e^{-\gamma t} \right) \quad ----- (3'')$$

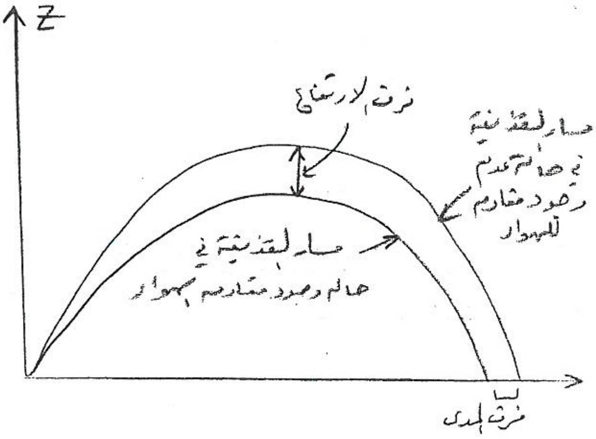
الأستاذ المساعد
فراس محمود هادي

الأستاذ المساعد
فراس محمود هادي

وبعد دمج المعادلات x , y , z نحصل على

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$$

$$\vec{r} = \left(\frac{\vec{v}_0}{\gamma} + \frac{\hat{k}g}{\gamma^2}\right)\left(1 - e^{-\gamma t}\right) - \hat{k}\frac{gt}{\gamma}$$



في حالة وجود مقاومة هواء صغيرة ($\gamma t \ll 1$)
نستفيد من المعادلة

$$e^{u} = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \cdots$$

فيكون الناتج

$$\left(1 - e^{-\gamma t}\right) = \gamma t - \frac{\gamma^2 t^2}{2!} + \frac{\gamma^3 t^3}{3!}$$

وبعد الاختصار وترتيب الناتج بالتعويض في معادلة (٣)

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \hat{k} - \Delta\vec{r}$$

حيث (Δr) تمثل جميع الحدود المتبقية وهو عامل التغير في مسار القذيفة

$$\Delta\vec{r} = \gamma\left[\vec{v}_0\left(\frac{t^2}{2!} - \frac{\gamma t^3}{3!} \cdots\right) + \hat{k}g\left(\frac{t^3}{3!} - \frac{\gamma t^4}{4!} \cdots\right)\right]$$

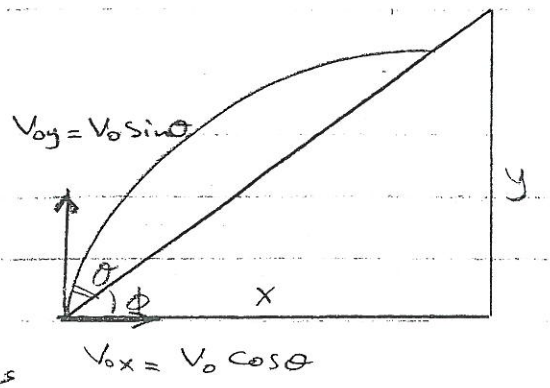
ملاحظة / فان المعادلة الاخيرة التي تمثل ($\vec{r}$) بوجود مقاومة الهواء والمعادلة السابقة (بدون وجود مقاومة الهواء)

$\vec{r} = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \hat{k}$ عند عدم وجود مقاومة الهواء

eq.(10)) A gun (بندقية) is located at the bottom (أسفل تل) of a hill of constant slope (ϕ). Show that that the range of the gun measured up the slope of the hill is :-

زاوية ميل البندقية (θ)

$$\tan\phi = \frac{y}{x}$$



سرعة x زمن

$$y = x \tan\phi$$

$$\therefore y = (v_{ox} t) \tan\phi$$

$$\therefore y = t\, v_o \cos\theta \frac{\sin\phi}{\cos\phi} \quad \text{------} \; (1)$$

على فرض اهمال مقاومة الهواء

$$y = V_{oy} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y = (v_o \sin\theta) t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{-----} \; (2)$$

المعادلتين متساويتين

$$t v_o \cos\theta \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = t v_o \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\frac{1}{2} g t^{\cancel{2}} = \cancel{t} v_o \sin\theta - \cancel{t} v_o \cos\theta \frac{\sin\phi}{\cos\phi}$$

$$t = \frac{2v_o}{g}\left(\sin\theta - \cos\theta \frac{\sin\phi}{\cos\phi}\right) \qquad \frac{\cos\phi}{\cos\phi}$$ نضرب البسط ب

$$t = \frac{2v_o}{g\cos\phi}(\sin\theta \cos\phi - \cos\theta \sin\phi)$$

$$t = \frac{2V_o}{g\cos\phi} \sin(\theta - \phi) \qquad , \quad \cos\phi = \frac{x}{R} \Rightarrow R = \frac{x}{\cos\phi}$$

$$\therefore R = \frac{(v_o \cos\theta) t}{\cos\phi}$$

بتعويض بمعادلة (t)

$$\therefore R = \frac{2V_o^2 \cos\theta \sin(\theta - \phi)}{g \cos^2\phi}$$

eq. 11) Show that the maximum value of the slope in the above problem is:-

$$\frac{v_0^2}{g(1+\sin\phi)}$$

$$R = \frac{2v_0^2 \cos\theta \sin(\theta-\phi)}{g\cos^2\phi}$$

ملاحظة

$$\cos A \sin B = \frac{1}{2}[\sin(A+B) - \sin(A-B)]$$

نفرض

$$A = \theta \ , \ B = \theta - \phi$$

$$\cos\theta \sin(\theta-\phi) = \frac{1}{2}[\sin(2\theta-\phi) - \sin\phi]$$

$$R = \frac{v_0^2[\sin(2\theta-\phi) - \sin\phi]}{g\cos^2\phi}$$

لكي يكون R_{max}

$$\sin(2\theta-\phi) = 1$$

الأستاذ المساعد فراس محمود هادي

$$R_{max} = \frac{v_0^2[1-\sin\phi]}{g(1-\sin^2\phi)}$$

$$R_{max} = \frac{v_0^2\cancel{[1-\sin\phi]}}{g(1+\sin\phi)\cancel{(1-\sin\phi)}}$$

$$R_{max} = \frac{v_0^2}{g(1+\sin\phi)}$$

الأستاذ المساعد فراس محمود هادي

٧

١

* The Harmonic Oscillator in two and three Dimensions

ارجاع

the linear restoring force which is always directed toward the origin.

$$\therefore \vec{F} = -k\vec{r}$$

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -k\vec{r}$$

$$m(\hat{i}\ddot{x} + \hat{j}\ddot{y} + \hat{k}\ddot{z}) = -k(\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z)$$

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$m\ddot{y} = -ky$$

$$m\ddot{z} = -kz$$

في حالة الحركة في مستوي

$$m\ddot{x} = -kx \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \quad \text{---} (1)$$

$$m\ddot{y} = -ky \Rightarrow m\ddot{y} + ky = 0 \quad \text{---} (2)$$

the solution of eq (1)

$$x = A_1 \sin(\omega_0 t + \phi_1) \quad \text{---} (3)$$

the solution of eq (2)

$$y = A_2 \sin(\omega_0 t + \phi_2) \quad \text{---} (4)$$

$$\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$$ اخذنا حالة الجهاز موحد الخواص

$$k_1 = k_2 = k_3$$

$$\phi = \phi_2 - \phi_1$$ اذا كان

$$\phi_1 = 0$$ ودلنفرض أن $$\Rightarrow \phi = \phi_2$$

$$x = A_1 \sin\omega_0 t$$ نعوض في معادلة (3)

$$\frac{x}{A_1} = \sin\omega_0 t$$

الأستاذ المساعد
فراس محمود هادي

$$\omega_0 t = \sin^{-1}\frac{x}{A_1}$$

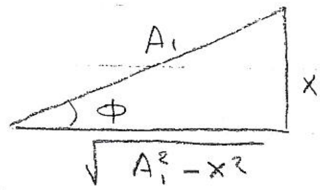
$$t = \frac{1}{\omega_0}\sin^{-1}\frac{x}{A_1}$$

نعوض في معادلة (4)

$$y = A_2 \sin\left[\cancel{\omega_0}\left(\frac{1}{\cancel{\omega_0}}\underbrace{\sin^{-1}\frac{x}{A_1}}_{\theta}\right) + \phi\right]$$

$$y = A_2\left[\sin\left(\sin^{-1}\frac{x}{A_1}\right)\cos\phi + \cos\left(\sin^{-1}\frac{x}{A_1}\right)\sin\phi\right]$$

$$y = A_2\left[\frac{x}{A_1}\cos\phi + \frac{\sqrt{A_1^2 - x^2}}{A_1}\sin\phi\right]$$



معادلة المسار

$$y = \frac{A_2}{A_1}\left(x\cos\phi + \sqrt{A_1^2 - x^2}\,\sin\phi\right)$$

شكل المسار يعتمد على زاوية الطور (ϕ)

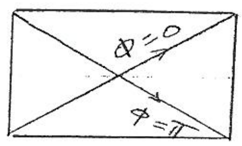
نأخذ مجموعة من الحالات

(1) اذا كانت $\phi = 0, \pi$

معادلة المسار $y = \frac{\mp A_2}{A_1} x$

يمثل معادلة خط مستقيم

اذا كانت $\phi = 0, \pi$

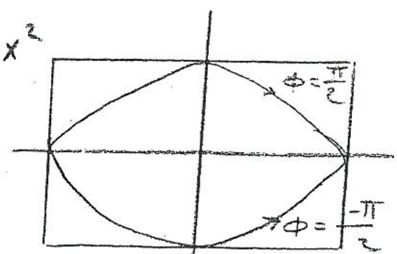


(2) اذا كانت $\phi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

$$y = \frac{\mp A_2}{A_1}\sqrt{A_1^2 - x^2}$$

$$y^2 = \frac{A_2^2}{A_1^2}\left(A_1^2 - x^2\right) \Rightarrow A_1^2 y^2 = A_2^2 A_1^2 - A_2^2 x^2$$

بالقسمة على $A_2^2 A_1^2$



معادلة المسار $\left(\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1\right)$ معادلة قطع ناقص

(3) اذا كان $A = A_1 = A_2$

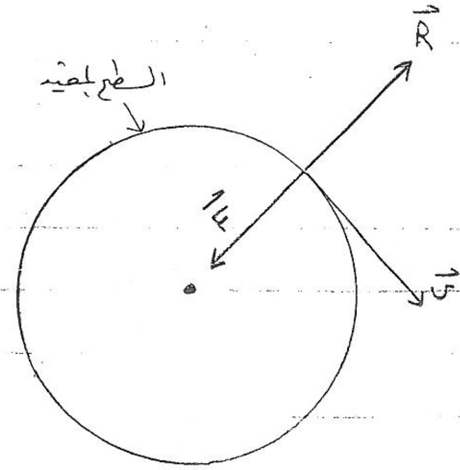
$$x^2 + y^2 = A^2$$

المسار دائري

٨ ٣

المحددات

* The Energ Equation For Smooth Constraint



The total Force acting on a particle moving under Constraint can be written by:- (F + R)

F :- external Force

R :- the Force of Constraint

the equation of motion Can be written as:-

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{R}$$

صفر

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = \vec{F}\cdot\vec{V} + \vec{R}\cdot\vec{V} \qquad (\cos 90 = zero)$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = \vec{F}\cdot\vec{V}$$

$$m\int \vec{V}\cdot d\vec{v} = F\cdot\int(\vec{v}\,dt)$$

$$m\frac{v^2}{2} = \underbrace{\vec{F}\cdot\vec{r}}_{\text{الشغل}} + \text{constant}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - W = \text{constant}$$

الشغل = - الطاقة الكامنة

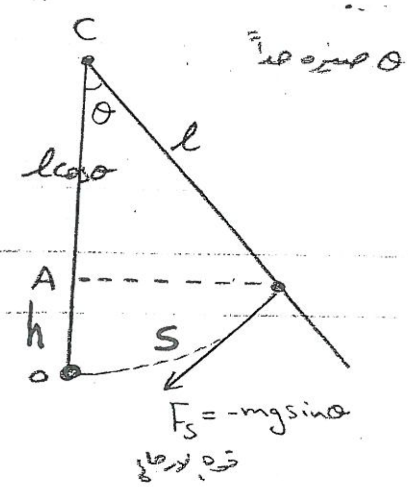
$$W = -V(x)$$ الشغل = - الطاقة الكامنة

$$\therefore \frac{1}{2}mv^2 + V(x) = \text{const.} = E$$

٤

*(The Simple Pendulum) البندول البسيط

θ صغيرة جداً



$$-mg\sin\theta = m\ddot{s}$$

$$m\ddot{s} + mg\sin\theta = 0$$

نق × زاوية = طول القوس

$$s = \theta l \Rightarrow \dot{s} = \dot{\theta} l \Rightarrow \ddot{s} = \ddot{\theta} l$$

$AC = l\cos\theta$

$h = l - l\cos\theta$

$$\cancel{m}\ddot{\theta} l + \cancel{m}g\sin\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \sin\theta \simeq \theta$$

$$\left[\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0\right]$$ المعادلة التفاضلية للبندول

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$ وهذه المعادلة تشبه

الأستاذ المساعد
فراس محمود هادي

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

زمن الذبذبة $T = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Finding The restoring Force F_s

$$F_s = \frac{-dV}{dx} \quad , V = mgh \Rightarrow V = mg(l - l\cos\theta)$$

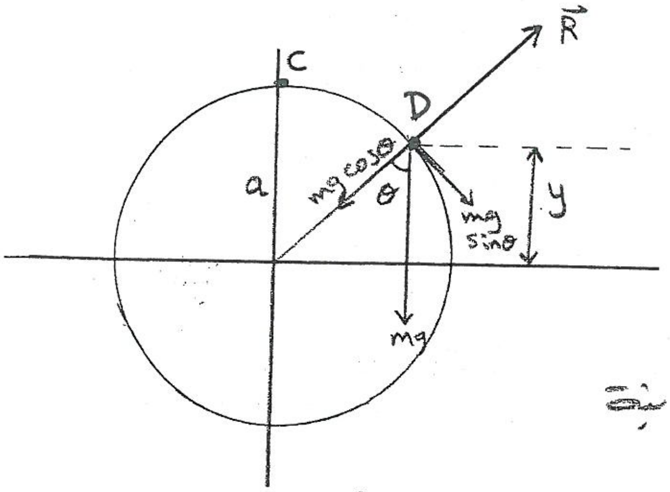
$$V = mgl(1-\cos\theta) = mgl\left(1-\cos\frac{s}{l}\right)$$

$$\frac{dV}{ds} = mgl(\sin\theta)\frac{1}{l} = mg\sin\theta$$

$$F_s = \frac{-dV}{ds} = -mg\sin\theta$$

الأستاذ المساعد
فراس محمود هادي

eq) A particle is placed on the up of smooth (c) sphere of radius (a), As the particle slides down Find the Vertical distance, from the point will it leave to the x-axis?



الاستاذ المساعد فراس محمود هادي

بما ان السطح املس ∴ الطاقة الكلية ثابتة
نستخدم قانون حفظ الطاقة

the total energy is Constant

$$E_c = E_D$$

$$\left(\frac{1}{2}mv^2 + V\right)_c = \left(\frac{1}{2}mv^2 + V\right)_D$$

$$\cancel{m}ga = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 + \cancel{m}gy$$

نضرب ب $\left(\frac{2}{m}\right)$

$$v^2 = 2ga - 2gy = 2g(a-y)$$

$$\therefore v = \sqrt{2g(a-y)}$$

بما ان الحركة مقيدة فان مجموع المركبتين تساوي القوة المركزية

$$-mg\cos\theta + R = \frac{-mv^2}{a}$$

$$R = mg\cos\theta - \frac{mv^2}{a}$$

$$\cos\theta = \frac{y}{a}$$, ونعوض عن قيمة v

الاستاذ المساعد فراس محمود هادي

$$R = \frac{mgy}{a} - \frac{2mg(a-y)}{a}$$

$$R = \frac{mg}{a}(y - 2a + 2y) \Rightarrow R = \frac{mg}{a}(3y - 2a)$$

عندما يترك الجسم سطح الكرة (القوة العمودية تساوي صفر)

$$0 = \frac{mg}{a}(3y - 2a)$$

$$3y - 2a = 0$$

$$3y = 2a$$

$$y = \frac{2}{3}a$$

ارتفاع النقطة التي يترك عندها الجسم سطح الكرة .

الأستاذ المساعد
فراس محمود هادي

eq.3) A particle of mass (m) moves in a Force field whose potential function is given by
$V = ax + by^2 + cz^2$.
If the particle passes through the origin with speed (v_0), what will its speed be and when it passes through the point $(1,1,1)$?

في البداية نثبت ان القوة محافظة والقوة المحافظة تكون دالة للموقع فقط.

$$E = T_{(r)} + V_{(r)}$$

$$F = -\nabla V = -\left(\hat{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right) = -(\hat{i}a + \hat{j}\,2by + \hat{k}\,2cz)$$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a & 2by & 2cz \end{vmatrix} = \hat{i}(0-0) + \hat{j}(0-0) + \hat{k}(0-0) = \text{zero}$$

∴ القوة محافظة.

نطبق قانون حفظ الطاقة

$$\left(\tfrac{1}{2}mv^2 + \underset{\text{صفر}}{V}\right)_{(0,0,0)} = \left(\tfrac{1}{2}mv^2 + V\right)_{(1,1,1)}$$

$$\tfrac{1}{2}mv_0^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 + (a*1 + b*1 + c*1)$$

$$\left.\tfrac{1}{2}mv_0^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 + (a+b+c)\right] * \tfrac{2}{m}$$

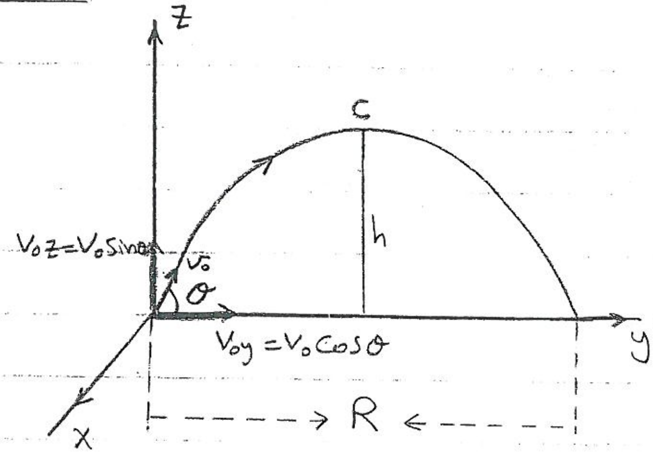
$$v_0^2 = v^2 + \tfrac{2}{m}(a+b+c)$$

$$v_0 = \left[v^2 + \tfrac{2}{m}(a+b+c)\right]^{1/2}$$

سرعة الجسم عند النقطة المطلوبة

eq. 7) A projectile is fired from the origin with initial speed (v_0) at an angle of elevation (θ) with the horizontal. If the air resistance is neglected, show that if the ground is level, the projectile hits the ground a distance

$\dfrac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$, This is called the horizontal range (R).



$$\vec{V} = V_0 - gt$$

$$\vec{V}_z = V_{oz} - gt$$

عند أقصى ارتفاع السرعة = صفر

$$\therefore V_{oz} = gt$$

$$V_o \sin\theta = gt$$

$$t = \frac{V_o \sin\theta}{g} \Rightarrow$$ الزمن اللازم للوصول إلى أقصى ارتفاع (زمن الصعود)

زمن الهبوط + زمن الصعود = T (زمن الطيران)

$$\therefore \boxed{T = \frac{2 V_o \sin\theta}{g}}$$

بما أن $R = V_{oy} T$

$$R = V_o \cos\theta \, \frac{2 V_o \sin\theta}{g}$$

$$R = \frac{2 V_o^2 \sin\theta \cos\theta}{g}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$$

$$R = \frac{V_o^2 \sin 2\theta}{g}$$

الأستاذ المساعد
فراس محمود هادي

الأستاذ المساعد
فراس محمود هادي

eq. 8) In problem (7) Find (h) high vertical distance For a projectile?

$$V^2 = V_0^2 - 2gz$$

الأستاذ المساعد
فراس محمود هادي

$$V_z^2 = V_{0z}^2 - 2gz$$

$z = h$ عند اقصى ارتفاع

$V_z = 0$

$$2gh = V_{0z}^2$$

$$2gh = (v_0 \sin\theta)^2$$

$$\boxed{h = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}}$$ اقصى ارتفاع

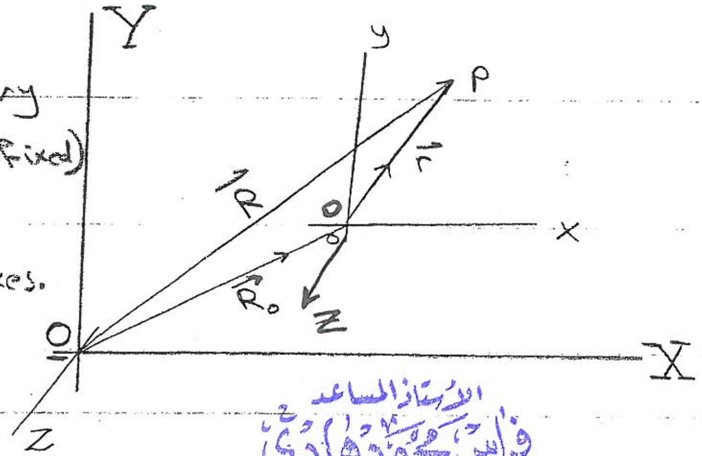
الأستاذ المساعد
فراس محمود هادي

* Translation Motion of the Coordinate system.

The Simplest type of motion of the coordinate system is that of pure ~~translation.~~

$(\underline{O}XYZ)$ are the primary Coordinate axes (assumed fixed)

$(Oxyz)$ are the moving axes.



In the Case of pure translation, that respective axes $\underline{O}X$ and Ox, and so on, remain paraller.

$\vec{R}$:- the position Vector of aparticle (p) in fixed System.

$\vec{r}$:- the position Vector of aparticle (p) in moving system.

الإزاحة

R_o :- the displacement of a moving origin.

thus:-

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{R}_o$$

by taking the first and second derivatives with respect to time:-

$$\therefore \vec{V} = \vec{v} + \vec{V}_o$$

السرعة

$$\vec{A} = \vec{a} + \vec{A}_o$$

التعجيل

$\vec{V}_o, \vec{A}_o$ are the velosity and acceleration, respectively, of moving origin.

v, a, are the velocity and acceleration, respectively, of (P) in the moving System.

In particular: بالأخص

If the moving system is not accelerating, so that $\vec{A}_o = \text{Zero}$

$$\therefore \boxed{\vec{A} = \vec{a}}$$

الأستاذ المساعد فراس محمود هادي

that is, the acceleration is the same with respect to either system.

This statement is true only for the case in which there is no rotation of the moving system.

General Motion of the Coordinate System

الحركة العامة للمحاور

$$\vec{R} = \vec{R}_o + \vec{r}$$

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$$

الأستاذ المساعد فراس محمود هادي

$$\therefore \vec{R} = \vec{R}_o + \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$$

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}_o + \underbrace{\hat{i}\dot{x} + \hat{j}\dot{y} + \hat{k}\dot{z}}_{\text{سرعة الجسيم بالنسبة للمحاور المتحركة}} + \underbrace{x\frac{d\hat{i}}{dt} + y\frac{d\hat{j}}{dt} + z\frac{d\hat{k}}{dt}}_{\text{السرعة الناتجة من دوران المحاور}}$$

Oxyz

$\vec{\omega}$ = angular velocity

but $\dfrac{d\hat{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{i}$

$$\frac{d\hat{j}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{j}$$

$$\frac{d\hat{k}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{k}$$

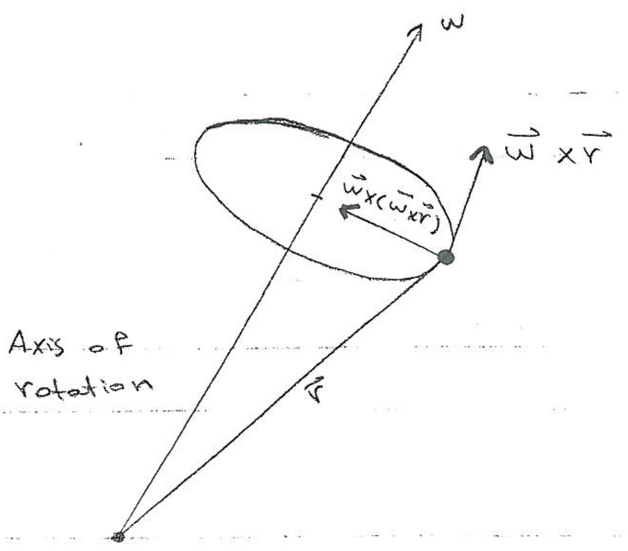
لسرعة لجسيم متحرك في نظام محاور
لإحداثيات ثابت والثاني يتحرك حركة انتقالية
ودورية

$$\therefore \frac{d\vec{R}}{dt} = \dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{r} + V_0$$

* ظهر الحد (V_0) بسبب الحركة الانتقالية للمحاور المتحركة فقط.

$$\left\{ \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} + \underbrace{2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}}_{\substack{\text{التعجيل الكوريولي} \\ \text{Coriolis} \\ \text{acceleration}}} + \underbrace{\dot{\omega} \times r}_{\substack{\text{التعجيل} \\ \text{المستعرض} \\ \text{transverse} \\ \text{acceleration}}} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\substack{\text{تعجيل الجذب} \\ \text{المركزي} \\ \text{centripetal} \\ \text{acceleration}}} + A_0 \right\} \text{ حفظ}$$

$$x\frac{d\hat{i}}{dt} + y\frac{d\hat{j}}{dt} + z\frac{d\hat{k}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$



The centripetal acceleration

الشكل يمثل التعجيل المركزي

Dynamics of a Particle in a Rotating Coordinate System

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} + 2\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + A_0 \Big\} * m$$

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \underbrace{-2m\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}} \underbrace{-m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}} \underbrace{-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})} \underbrace{-m\vec{A}_0}$$

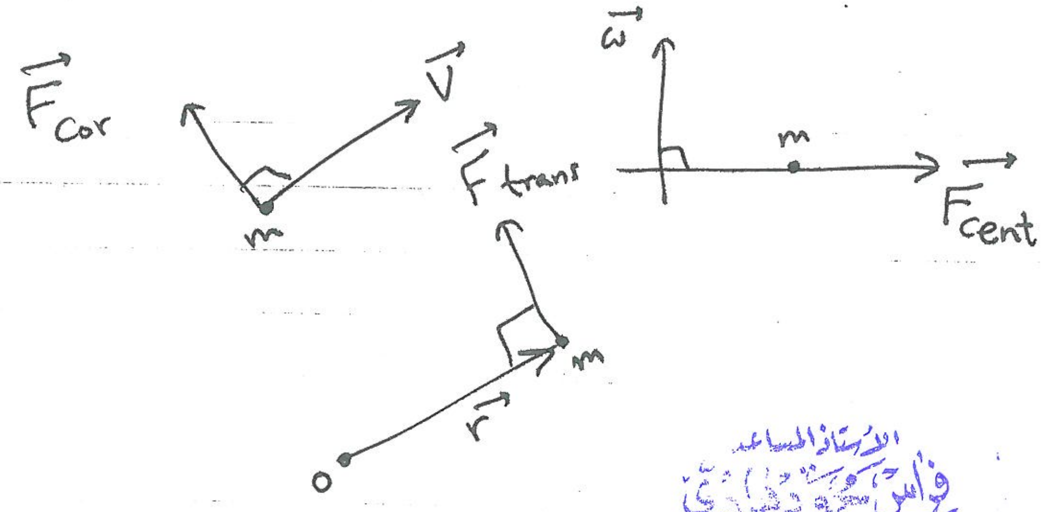
القوة الكوريولية	$-2m\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}$	Coriolis force $= \vec{F}_{Cor}$
القوة المستعرضة	$-m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}$	transverse force $= \vec{F}_{trans.}$
القوة المركزية (النابذة)	$-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$	centrifugal force $= \vec{F}_{cent}$
القوة المتبقية	$-mA_0$	remaining force

in ~~which the total "force" is~~ given by:.

$$\left[\ "F" = \vec{F} + \vec{F}_{cor} + \vec{F}_{trans} + \vec{F}_{cent} - mA_0\ \right]$$

الأستاذ المساعد
فراس محمود هادي

$$\vec{F} - mA_0 - 2m\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}} - m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = m\ddot{\vec{r}}$$



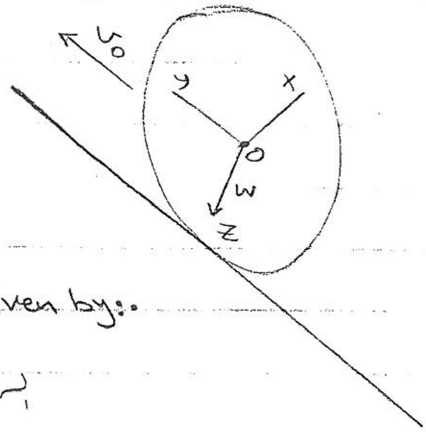
الأستاذ المساعد
فراس محمود هادي

ex) A wheel (عجلة) of radius (b) rolls along the ground with Constant forward (امامي) speed (انطلاق) (v), Find the acceleration, relative to the ground, of any point on the rim.

$\vec{r} = \hat{i}\, b$

$\dot{\vec{r}} = 0$

$\ddot{\vec{r}} = 0$



the angular velocity vector is given by:

$$\vec{\omega} = \hat{k}\,\omega = \hat{k}\,\frac{v}{b}$$

السرعة الزاوية = السرعة / نق

الشكل يبين محاور مثبتة في العجلة المتحركة

all terms in the expression for acceleration Vanish except the Centripetal term.

$$\vec{A} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \hat{k}\,\omega \times (\hat{k}\,\omega \times \hat{i}\, b)$$

$$= \frac{v^2}{b}\, \hat{k} \times (\hat{k} \times \hat{i})$$

$$= \frac{v^2}{b}\, \hat{k} \times \hat{j}$$

$$= \frac{v^2}{b}\, (-\hat{i})$$

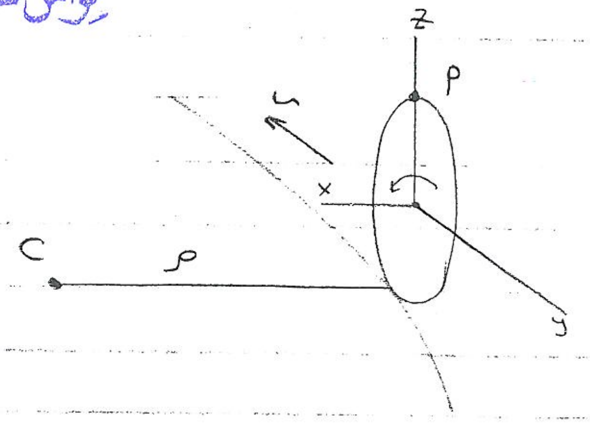
∴ مقدار $(\vec{A})$ يساوي $\left(\frac{v^2}{b}\right)$ ويتجه دائماً نحو مركز العجلـــة

ex2) A bicycle travels with constant speed around a track (مضمار) of radius (ρ). What is the acceleration of the highest point on one of its wheels?

الأستاذ المساعد
فراس محمود هادي

$$\vec{\omega} = \hat{k}\,\frac{v}{\rho}$$

$$A_o = \hat{i}\,\frac{v^2}{\rho}$$



the acceleration in the moving system oxyz

$$\vec{\ddot{r}} = -\hat{k}\,\frac{v^2}{b}$$ لأنه [illegible] على محور y

the velocity of this point in the moving system is given by:

$$\dot{r} = -\hat{j}\,v$$

so, the Coriolis acceleration is:

$$2\vec{\omega}\times\dot{r} = 2\left(\frac{v}{\rho}\hat{k}\right)\times(-\hat{j}\,v) = 2\,\frac{v^2}{\rho}\,\hat{i}$$

- the angular velocity is constant $\Rightarrow \therefore \dot{\omega} = \text{zero}$

$\therefore$ centripetal acceleration is also zero, because

$$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \frac{v^2}{\rho^2}\,\hat{k}\times(\hat{k}\times b\hat{k}) = \text{zero}$$

Thus, the total acceleration of the highest point on the wheel is:

$$\vec{A} = 3\,\frac{v^2}{\rho}\,\hat{i} - \frac{v^2}{b}\,\hat{k}$$

الأستاذ المساعد
فراس محمود هادي

ex.3) A bug (بقة) crawls (تزحف) outward (الى الخارج) with constant speed (v) along the spoke of a wheel which is rotating with constant angular velocity (ω) about a vertical axis. Find all the forces acting on the bug.

$$\vec{r} = \hat{i}x = \hat{i}vt$$

$$\dot{\vec{r}} = \hat{i}v$$

$$\ddot{\vec{r}} = 0$$

If we choose the z axis to be vertical, then

$$\vec{\omega} = \hat{k}\omega$$

The various forces are then given by:

Coriolis force:

$$-2m\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}} = -2m\omega v(\hat{k}\times\hat{i}) = -2m\omega v\hat{j}$$

transverse force:

$$-m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} = 0 \qquad (\omega = \text{constant})$$

القوة النابذة Centrifugal force:

$$-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$= -m\omega^2[\hat{k}\times(\hat{k}\times\hat{i}x)]$$

$$= -m\omega^2 x(\hat{k}\times\hat{j})$$

$$= m\omega^2 x\hat{i}$$

∴ المعادلة النهائية تصبح

$$\vec{F} - 2m\omega v\hat{j} + m\omega^2 x\hat{i} = 0$$

هنا $\vec{F}$ هي القوة الحقيقية التي يسلطها شعاع الدولاب على البقة