

الشغل والطاقة

(Work & Energy)



1-5 تمهيد

درسنا في الفصول السابقة كيف ولماذا تتحرك الأجسام، ووجدنا أنه عندما تؤثر محصلة قوى لاتساوي الصفر على جسم فإنه يتحرك بشكل أو بآخر. ونتساءل الآن ما الفائدة من حركة وتحريك الأجسام؟ ولماذا نزعج أنفسنا بهذه التفاصيل؟ تأتي الإجابة في شقين؛ أولاًهما أن الإنسان بفضوله الدائم يسعى لتفسير الظواهر الطبيعية وأسبابها وما ينتج عنها. وثانيهما أن الإنسان يريد الاستفادة بما أنعم الله عز وجل علينا وسخره لنا، فهو يريد سيارة تنقله من مكان لآخر، ومصابيح كهربائية لإنارة المدن والبيوت، وغير ذلك. وبالطبع فإن كل هذا لن يتحقق ما لم نعرف كيف نتحكم بالأشياء ونستفيد من حركاتها، سواء كانت إلكترونات صغيرة تعطينا إشارات كهربائية أو أجسام كونية تسبب دوران الأرض وتعاقب الليل والنهار.

لذلك سندرس في هذا الفصل كيف نستفيد من حركة جسم فنعرّف **طاقة الحركة**، وكيف نستفيد من تحريكه فنعرّف **الشغل وطاقة الوضع**. ثم نربط بين هذه الكميات بواسطة **نظرية الشغل والطاقة**. ونعرّف بعد ذلك القوى التي تحافظ على الطاقة وتلك التي لاتحافظ عليها وصولاً **لمبدأ حفظ الطاقة**. ثم نعرّف أبسط الآلات التي استخدمها الإنسان ونقارن بينها بحساب **القدرة الناتجة** عن كل واحدة ومردودها.

2-5 الشغل (Work)

إذا أثرت قوة \mathbf{F} على جسم خلال انتقاله مسافة \mathbf{s} ، كما في الشكل (1-5)، فإننا نعرف شغل هذه القوة (أو بالأحرى شغل مصدر القوة) بالعلاقة:

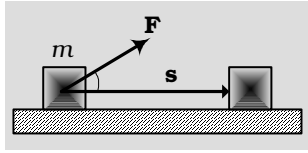
(1-5)

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = Fs \cos \phi$$

حيث ϕ الزاوية بين القوة \mathbf{F} والمسافة \mathbf{s} .

ونلاحظ من المعادلة (1-5) أن وحدة الشغل هي قوة مضروبة بمسافة، أي N.m ويطلق عليها في نظام الوحدات الدولي جول (Joule) ويرمز لها اختصاراً J، أي أن:

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N.m} = 1 \text{ kg.m}^2/\text{s}^2$$

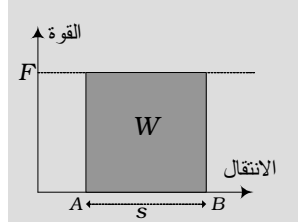


الشكل (1-5)

وبحسب تعريفه، فإن الشغل ينتج عن الضرب العددي لمتجهي المسافة والقوة، ولذلك فهو كمية عددية ليس له اتجاه إلا أنه يمكن أن يكون موجباً أو سالباً. فإن كان موجباً فهذا يعني أن مصدر القوة يقوم فعلاً بشغل، وإن كان سالباً فإن مصدر القوة يضيع الشغل، كما سنوضح لاحقاً.

وباستخدام العلاقة (1-5) نلاحظ أنه إذا كانت القوة ثابتة وموازية لجهة انتقال الجسم عندئذ يصير شغلها مساوياً إلى:

$$W = Fs$$

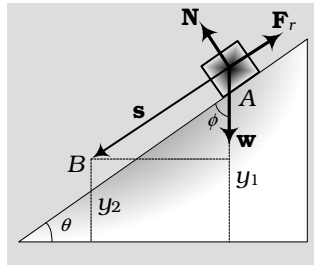


الشكل (2-5)

ويمثل الشكل (2-5) تغيرات القوة مع المسافة في هذه الحالة ونستنتج منه أن الشغل يمثل المساحة المحصورة تحت منحني القوة بين نقطتي الانتقال. وهذه نتيجة عامة حتى وإن لم تكن القوة موازية لخط الانتقال.

مثال 1-5 شغل الوزن ورد فعل السطح والاحتكاك

ينزل جسم كتلته 5 kg مسافة 5 m على مستو خشن مائل بزاوية 37°، كما هو موضح بالشكل (3-5). ما شغل كل من وزن الجسم ورد فعل السطح والاحتكاك إذا كان معامل الاحتكاك بينهما 0.2؟



الشكل (3-5)

الحل: (أ) شغل الوزن: نكتب شغل الوزن من العلاقة (1-5) بالشكل:

$$W_w = \mathbf{w} \cdot \mathbf{s} = ws \cos \phi$$

ونلاحظ من الشكل (3-5) أن:

$$ws \cos \phi = y_1 - y_2$$

حيث y_1 الارتفاع الابتدائي و y_2 الارتفاع النهائي للجسم عن سطح الأرض. ومن ثم نكتب شغل الوزن:

$$(2-5) \quad W_w = mg(y_1 - y_2)$$

ونلاحظ من هذه النتيجة أن شغل الوزن لا يعتمد على شكل الطريق الذي يتبعه الجسم للانتقال من الموضع الابتدائي للموضع النهائي، ولا على موضع الأرض نفسها، بل يعتمد على الفرق بين الارتفاع الابتدائي والنهائي للجسم عن سطحها. ولذلك يمكن اختيار مستوى الأرض كيفما نشاء شرط أن نلتزم به عند حل مسألة معينة. ومن المفضل وضعه عند أخفض نقطة يصل إليها الجسم خلال حركته.

ففي هذا المثل نضع الأرض عند النقطة B فنجد أن $y_1 = 5 \cos 53^\circ = 3 \text{ m}$ و $y_2 = 0$ ويصير شغل الوزن مساوياً

$$W_w = 5(9.8)(3.0) = 147 \text{ J}$$

ومن الواضح أننا لم نكن بحاجة لاستعمال (2-5) لحساب شغل الوزن بل كان بالإمكان تطبيق (1-5) مباشرة مع وضع $s=5 \text{ m}$ و $\phi=53^\circ$ فنحصل على نفس النتيجة بسهولة، إلا أن العلاقة (2-5) مهمة لتعريف طاقة الوضع لجسم خاضع لقوة الجاذبية والتي سنتعرض لها بعد قليل.

(ب) **شغل رد فعل السطح:** بما أن قوة رد فعل السطح \mathbf{N} عمودية دوماً على السطح الذي يتحرك عليه الجسم لذا تكون الزاوية بين \mathbf{N} و \mathbf{s} مساوية لـ 90° دوماً ويكون شغل رد الفعل هو:

$$(3-5) \quad W_N = \mathbf{N} \cdot \mathbf{s} = 0$$

فلا يوجد شغل لقوة رد فعل السطح وهذه النتيجة صحيحة لأي قوة عمودية على اتجاه الحركة.
(ج) **شغل قوة الاحتكاك:** بما أن قوة الاحتكاك التي يؤثر بها سطح خشن على جسم يتحرك عليه تعاكس اتجاه الحركة دوماً لذا تكون الزاوية بين المسافة \mathbf{s} والقوة \mathbf{F}_r هي 180° ويصير شغل قوة الاحتكاك:

3-5 شغل قوة متغيرة

(4-5)

$$W_N = \mathbf{F}_r \cdot \mathbf{s} = -F_k s = -\mu_k N s$$

فشغل الاحتكاك سالب دوماً أي أن السطح الخشن يضيع بعضاً من الشغل الذي تبذله جاذبية الأرض خلال انزلاق الجسم عليه. كما نلاحظ من العلاقة (4-5) أننا استعملنا قوة الاحتكاك الحركي الذي يظهر عندما يتحرك الجسم فعلاً على السطح، أما لو بقي ساكناً عندئذ يصير الاحتكاك سكونياً وبالتالي لا توجد مسافة مقطوعة على السطح ويكون شغل الاحتكاك السكوني مساوياً للصفر دوماً.

ونحسب شغل الاحتكاك في مثالنا هذا بحساب قوة الاحتكاك فنكتب:

$$F_k = \mu_k N$$

حيث N رد فعل السطح الذي نجده من المركبة الصادية لمعادلة الحركة، كما في الشكل (3-5):

$$N - mg \cos \theta = 0 \Rightarrow N = mg \cos \theta$$

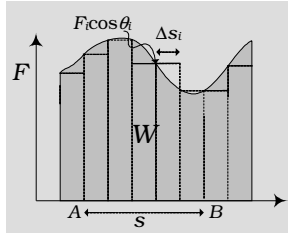
أي أن:

$$F_k = \mu_k mg \cos \theta \Rightarrow W_{F_k} = -F_k s = -\mu_k (mg \cos \theta) s = -39 \text{ J}$$

(د) شغل محصلة القوى: بما أن الشغل كمية عددية نكتب أن شغل محصلة القوى يساوي مجموع أشغال القوى المختلفة المؤثرة على الجسم بغض النظر عن اتجاهاتها، أي أن:

$$W_T = W_{mg} + W_N + W_{F_k} = 147 + 0 + (-39) = 108 \text{ J}$$

3-5 شغل قوة متغيرة



الشكل (4-5)

افتراضنا عند تعريف الشغل في العلاقة (1-5) أن القوة \mathbf{F} تبقى ثابتة بالقيمة والاتجاه خلال انتقال الجسم المسافة \mathbf{s} ، إلا أنه في كثير من الحالات لا يكون الأمر كذلك، إذ يمكن أن تتغير القوة بقيمتها أو اتجاهها أو كلاهما. لذلك لحساب شغل قوة تتغير خلال انتقال الجسم من نقطة أولى A إلى نقطة ثانية B نجزء الطريق الذي يتحرك عليه الجسم إلى أجزاء $\Delta \mathbf{s}_1$ و $\Delta \mathbf{s}_2$ و $\Delta \mathbf{s}_3$ وهكذا،

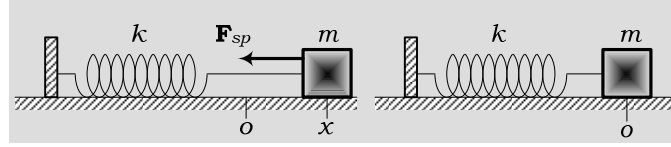
كما في الشكل (4-5)، بحيث يمكن اعتبار القوة المؤثرة عليه خلال كل جزء ثابتة بالقيمة والاتجاه. وعندئذ نكتب الشغل المبذول خلال كل جزء على النحو:

4-5 شغل قوة الإرجاع

ونجد من التجربة أنه إذا حاولنا إبعاد الجسم عن وضع الاتزان o مسافة x فإن الزنبرك يؤثر عليه بقوة تتناسب مع x لكن بالاتجاه المعاكس، كما في الشكل (5-6)، بحيث نكتب:

(8-5)

$$F_{sp} = -kx$$



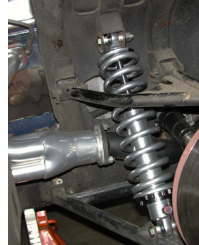
(أ) الجسم عند وضع الاتزان (ب) الجسم يبعد x عن الاتزان

الشكل (5-6)



ميزان مجوهرات حساس

وتسمى F_{sp} في العلاقة (8-5) قوة الإرجاع أو قوة المرونة للزنبرك، بينما يسمى k ثابت مرونة الزنبرك (spring force constant) ووحدته، كما نلاحظ من العلاقة (8-5)، هي N/m ، وتمثل ليونة أو صلابة الزنبرك، أي مقدار القوة اللازمة لتغيير طوله متراً واحداً. فكلما كانت k كبيرة كلما كان الزنبرك صلباً ويحتاج لقوة كبيرة لضغطه أو شده مسافة صغيرة، وبالعكس إذا كان مرناً أو ليناً فإنه يستطيل وينضغط بسهولة تحت تأثير قوة صغيرة. ومن أفضل الأمثلة على زنبرك لين الميزان الذي يستخدمه بائع المجوهرات حيث يتحسس أي كتلة صغيرة توضع عليه ولذلك نقول إنه



زنبرك ماص الصدمات

حساس. أما الميزان المستخدم في سوق الخضار، أو تلك التي تحمل سيارة (ماصات الصدمات (shock absorbers)) فيحوي زنبركاً صلباً للغاية لا يتأثر إلا إذا علقت به كتلة كبيرة نسبياً، ولذلك نقول إنه قليل الحساسية. وتسمى العلاقة (8-5) قانون هوك في المرونة (Hooke's law).

لنحسب الآن شغل قوة الإرجاع الذي يبذله زنبرك عندما ينتقل الجسم المربوط به من بعد x_1 عن وضع الاتزان إلى x_2 فنجد من العلاقة (5-7):

$$W_{sp} = \int_{x_1}^{x_2} (-kx)dx = \frac{1}{2}k(x_1^2 - x_2^2)$$

أي أن:

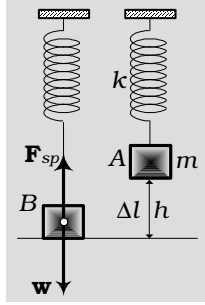
(9-5)

$$W_{sp} = \frac{1}{2} k(x_1^2 - x_2^2)$$

فشغل قوة الزنبرك تعتمد على الموضع الابتدائي والنهائي للجسم فقط لاعلى شكل الطريق المتبع للانتقال بينهما، وهذا مشابه تماماً لقوة الجاذبية (الوزن). وسنرى أهمية هذا الموضوع في حفظ الطاقة لاحقاً.

مثل 2-5 تحديد ثابت المرونة لزنبرك تجريبياً

يمكن تحديد ثابت مرونة زنبرك تجريبياً بتعليق جسم كتلته m بزنبرك طوله الطبيعي l_0 مدلى من سقف المختبر بحيث نسند الجسم باليد ليهبط ببطء إلى أن يقف فيستطيل الزنبرك خلال ذلك بمقدار Δl . ماثبات المرونة لهذا الزنبرك؟



الشكل (7-5)

الحل: بما أن الجسم يصل لحالة اتزان في وضع شاقولي لذا تكون محصلة القوى عليه معدومة وتساوي محصلة الوزن mg وقوة الإرجاع $F_{sp} = kx = k\Delta l$ (حيث كتبنا قيمتها لأننا نعرف اتجاهها للأعلى بعكس استطالة الزنبرك)، ومن ثم نجد من الشكل (7-5) أن:

$$k\Delta l = mg$$

أي أن:

(10-5)

$$k = \frac{mg}{\Delta l}$$

ويتم تجريبياً تغيير الكتلة m عدة مرات وقياس الاستطالة Δl كل مرة ثم رسم تغيرات الاستطالة مع الكتلة واستخدام ميل الخط المستقيم الناتج لتحديد k .

5-5 نظرية الشغل والطاقة (Work-Energy Theorem)

عندما يتحرك جسم تحت تأثير قوة أو أكثر فإن شغل هذه القوى ما هو إلا طاقة تصرف أو تضيع من قبل كل واحدة منها. ولذا نسأل أين يذهب هذا الشغل؟ للإجابة على هذا السؤال نعتبر جسماً m يتحرك مسافة s تحت تأثير محصلة قوى F_T بحيث تتغير سرعته من v_1 إلى v_2 . فإذا حسبنا شغل F_T نجد:

$$W_T = F_T s$$

ولكن وبحسب قانون نيوتن الثاني فإن:

$$F_T = ma$$

وبفرض أن F_T ثابتة عندئذ يكون a ثابتاً أيضاً بحيث نستخدم علاقات الحركة بتسارع ثابت ونكتب:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2as$$

وبتعويض F_T و a في علاقة الشغل نجد:

(11-5)

$$W_T = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

ونظراً لضرورة تناسق الوحدات على طرفي المعادلة السابقة يجب أن تكون وحدة كل حد من الطرف الأيمن هي جول. وبالفعل لو كتبنا وحدة $\frac{1}{2}mv^2$ لوجدنا:

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right] = \text{kg} \cdot (\text{m/s})^2 = \text{kg} \cdot (\text{m/s}^2) \cdot \text{m} = \text{N} \cdot \text{m}$$

أي أنها وحدة طاقة فعلاً، ولذلك نكتب الكمية $\frac{1}{2}mv^2$ بالشكل:

(12-5)

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

ويطلق عليها اسم **طاقة حركة** (*kinetic energy*) لأنها تتعلق بخواص الجسم فقط من كتلة وسرعة بغض النظر عن أي مؤثر خارجي، بحيث أنه إذا كان للجسم كتلة m وسرعة v عندئذ يكون له طاقة حركة معطاة بالعلاقة (12-5)، أيًا كان موضعه أو القوى المؤثرة عليه. وللنتيجة الأخيرة أهمية كبيرة إذ سنرى فيما بعد أن هناك طاقة أخرى للجسم تسمى **طاقة وضع** ليست مستقلة عن الوسط الذي يوجد به وتظهر نتيجة تأثير القوى الخارجية المؤثرة عليه. ونلاحظ أن طاقة الحركة مثل أي شغل أو طاقة هي كمية عددية ليس لها اتجاه فسواء تحرك الجسم للأعلى أو للأسفل، أو للشرق أو للغرب، فإن طاقته الحركية هي نفسها طالما أن كتلته وسرعته لم تتغيرا.

وبتعويض الطاقة الحركية المعطاة بـ (12-5) في معادلة الشغل الكلي (11-5) نجد:

(13-5)

$$W_T = K_2 - K_1 = \Delta K$$

فشغل القوى الكلية المؤثرة على جسم يتحول لتغيير طاقته الحركية. وتسمى العلاقة الأخيرة نظرية الشغل والطاقة التي تنص على أن **شغل محصلة القوى المؤثرة على جسم عندما ينتقل بين نقطتين يساوي تغير طاقته الحركية بينهما.**

وننوه أخيراً إلى أنه على الرغم من أننا استخرجنا نظرية الشغل والطاقة لمحصلة قوة ثابتة، إلا أنها صحيحة من أجل أي قوة ولو كانت متغيرة بالقيمة أو الاتجاه أو كليهما.

مثل 3-5

ما شغل محصلة القوى المؤثرة على جسم كتلته 0.5 kg عندما ينتقل بين نقطتين فتتغير سرعته من $\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} \text{ m/s}$ إلى $\mathbf{v}_2 = 7\mathbf{j} \text{ m/s}$ ؟ (\mathbf{i} و \mathbf{j} متجهي وحدة على كل من ox و oy ، على الترتيب).

الحل: لحساب شغل محصلة القوى نستخدم نظرية الشغل والطاقة فنكتب:

$$v_1^2 = 9 + 25 = 34 \text{ m/s}^2$$

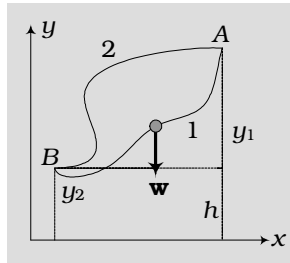
و

$$v_2^2 = 49 \text{ m/s}^2$$

ومن ثم نجد من (5-13) أن:

$$W_T = \frac{1}{2}(0.5)(49) - \frac{1}{2}(0.5)(34) = 3.75 \text{ J}$$

6-5 القوى المحافضة وغير المحافضة (conservative & non-conservative forces)



الشكل (8-5)

لنفترض أن لدينا جسماً كتلته m ينتقل على الطريق 1 في الشكل (8-5) من نقطة أولى A ارتفاعها y_1 إلى نقطة ثانية B ارتفاعها y_2 ، ولنحسب الشغل الذي تقوم به قوة الجاذبية خلال ذلك. فنكتب من (5-2):

$$W_{A \rightarrow B} = mg(y_1 - y_2)$$

وإذا عاد الجسم من B إلى A على الطريق 2 عندئذ يكون شغل الجاذبية:

$$W_{B \rightarrow A} = mg(y_2 - y_1)$$

ولهذا يكون شغل الجاذبية في الرحلة المغلقة من A إلى B ثم عودة إلى A هو:

(14-5)

$$W_{A \rightarrow B \rightarrow A} = 0$$

أي أن قوة الجاذبية تتصف بالصفات التالية:

- 1- لا يعتمد شغلها على الطريق المتبع بل 2- يعتمد على الموضع (أو الارتفاع) الابتدائي والنهائي للجسم و3- يساوي الصفر إذا سار الجسم على طريق مغلقة تنتهي عند نقطة البداية.
- تسمى كل قوة تتصف بالصفات المذكورة أعلاه **قوة محافظة** لأنها تحافظ على طاقة الجسم الخاضع لها خلال حركته. **فقوة الجاذبية هي قوة محافظة.**
- ومن القوى الأخرى المهمة المحافظة **قوة الإرجاع**. فقد وجدنا سابقاً أن شغل قوة الزنبرك عندما يتغير بعد جسم مربوط به عن وضع الاتزان من x_1 إلى x_2 يعطى بالعلاقة (9-5):

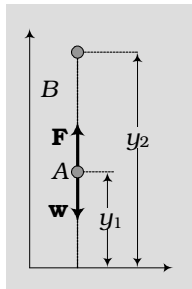
$$W_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2}k(x_1^2 - x_2^2)$$

وعندما ينتقل الجسم من x_2 إلى x_1 يصير شغل قوة الزنبرك:

$$W_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

أي أن الشغل الكلي المبذول عندما يتحرك الجسم على الطريق المغلقة $x_1 \leftarrow x_2 \leftarrow x_1$ يساوي الصفر، كما أنه مستقل عن الطريق المتبع، ولا يعتمد إلا على الموضعين الابتدائي والنهائي للجسم بالنسبة لوضع الاتزان. **فقوة الإرجاع** تشبه قوة الجاذبية في صفاتها ولذا نقول إنها **قوة محافظة**. ومن البديهي أن هناك قوى كثيرة لاتحقق خواص القوى المحافضة كالاحتكاك الحركي التي تضيع الطاقة بشكل مستمر. يطلق على هذا النوع اسم **قوى غير محافظة** لأنها لاتحافظ على الطاقة.

7-5 طاقة الوضع (Potential Energy)



الشكل (9-5)

لنفترض أننا رفعنا جسماً كتلته m من نقطة أولى A ارتفاعها y_1 إلى نقطة ثانية B ارتفاعها y_2 ، كما في الشكل (9-5)، بحيث يتحرك الجسم بسرعة ثابتة، وبذلك تكون القوة التي نبذلها مساوية بالقيمة ومعاكسة بالاتجاه لوزن الجسم، وبالتالي يكون شغلنا هو:

$$(15-5) \quad W_{AB} = mgh = mg(y_2 - y_1)$$

فإذا وصل الجسم للنقطة B وتوقف هناك فإننا نتساءل أين ذهب شغلنا؟

وهل للجسم أي طاقة في ذلك الموضع؟ من الواضح أنه لايملك طاقة حركة لأنه ساكن، لكنه يملك طاقة أخرى لأننا لو افلنتاه لتحرك للأسفل مكتسباً طاقة حركة تتزايد كلما كان ارتفاع النقطة B التي وصل إليها أكبر. ولذلك نقول إن الشغل قد تحول لطاقة أعطيت للجسم وبقيت كامنة فيه إلى أن تركناه يسقط للأسفل. يطلق على هذه الطاقة اسم **طاقة كامنة أو طاقة وضع** لأنها تعتمد على الارتفاع (أي الموضع) الذي وصل الجسم إليه. ويمكن تحديد الطاقة الكامنة بكتابة (5-15) بالشكل:

$$(16-5) \quad W_{AB} = mgy_2 - mgy_1$$

حيث نلاحظ أن الشغل الذي قمنا به يساوي الفرق بين حدين متماثلين تماماً ووحدة كل منهما هي وحدة طاقة، أي جول (تأكد من ذلك)، ولذلك نكتب:

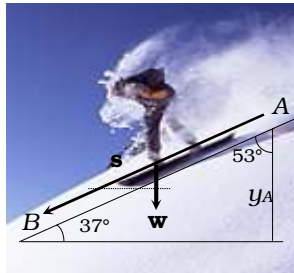
$$(17-5) \quad U = mgy$$

حيث نسمي U طاقة وضع الجسم عندما يكون على ارتفاع y عن سطح الأرض (الذي يمثل وضع الاتزان بالنسبة للأرض). ونستنتج مما تقدم أن شغل الجاذبية عندما ينتقل الجسم من A إلى B هو:

$$(18-5) \quad W_g = mgy_1 - mgy_2 = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

فشغل قوة الجاذبية عندما يتحرك جسم خاضع لها بين نقطتين يساوي سالب تغير طاقة وضعه بينهما (لأن تغير أي كمية يعني القيمة النهائية مطروحاً منها القيمة الابتدائية).

مثل 4-5



الشكل (10-5)

يتزلج شخص كتلته 70 kg مسافة 100 m على منحدر مائل بزاوية 37° ، كما في الشكل (5-10). ما طاقة وضعه الابتدائية والنهائية؟ وما شغل الجاذبية خلال هذا الانتقال؟

الحل: نكتب طاقة وضع الجسم على النحو:

$$U = mgy$$

ونظراً لأن موضع الأرض ($y=0$) لم يفرض علينا في هذه المسألة لذا نختاره عند أخفض نقطة يصل إليها الجسم، أي B فيكون $y_B=0$ ونكتب:

$$U_A = mgy_A = mg \sin 37^\circ = (70 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(100 \text{ m})\sin 37^\circ = 41.3 \text{ kJ}$$

كما أن

$$U_B = mgy_B = 0$$

أما شغل قوة الجاذبية فيساوي الفرق في طاقة الوضع بين البداية والنهاية (أي سالب التغير) ونكتب:

$$W_g = -\Delta U = -(U_B - U_A) = 41.3 \text{ kJ}$$

سنحدد الآن طاقة الوضع الناتجة عن قوة المرونة لزنبرك حيث وجدنا أنه إذا كان لدينا جسم m مربوط بزنبرك وأزحناه مسافة x عن وضع الاتزان، فإن الشغل الذي نقوم نحن به يساوي (تأكد من ذلك):

$$W = \frac{1}{2} kx^2$$

وإذا أبقينا الجسم عند ذلك الموضع فإننا نتساءل أين ذهب الشغل الذي قمنا به؟ والجواب أنه تخزن في النظام المؤلف من الجسم والزنبرك على شكل طاقة كامنة أو طاقة وضع. وبالتالي فإننا نعرف طاقة وضع جسم مرتبط بالزنبرك بالعلاقة:

(19-5)

$$U_{sp} = \frac{1}{2} kx^2$$

حيث x مقدار ابتعاد الجسم عن وضع الاتزان.

ويجدر التنويه هنا إلى أن طاقة الوضع تعتمد على القوى المؤثرة على الجسم المعني، فلو اختفى تسارع الجاذبية في العلاقة (17-5) أو اختفى الزنبرك (k) في العلاقة (19-5) لاختفت طاقة الوضع أيضاً. وحيث أن لكل قوة مصدر ما، كالأرض في حالة الجاذبية والزنبرك في الحالة الثانية، فإننا نقول إن U هي طاقة وضع النظام (*system*) المؤلف من الجسم ومصدر القوة المؤثرة عليه. أي أن طاقة الوضع ناتجة عن متغيرات تحريك الجسم، ولذا كان من الواجب أن نسميها **طاقة تحريك** (*dynamic energy*)، أما طاقة الحركة (*kinetic energy*) فهي مرتبطة بالجسم فقط بغض النظر عن القوى المؤثرة عليه. فطالما أن له كتلة وسرعة فله طاقة حركة، أي أنها ناتجة عن متغيرات حركة الجسم.

مثل 5-5

يعلق جسم كتلته 5 kg بنهاية زنبرك طوله الطبيعي 15 cm فيصير طوله 17 cm عندما يتزن الجسم. (أ) ما ثابت مرونة الزنبرك؟ (ب) ما طاقة وضع الجسم إذا أبعدها 5 cm عن وضع اتزانها؟

الحل: (أ) وجدنا في المثل (2-5) أن ثابت مرونة زنبرك يتحدد عملياً من العلاقة $k = mg / \Delta l$ حيث Δl استطالة الزنبرك بعد تعليق الجسم به، ولذلك نكتب:

$$k = \frac{mg}{\Delta l} = \frac{(5 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{(0.02 \text{ m})} = 2450 \text{ N/m}$$

(ب) عند إزاحة الجسم 5 cm عن وضع الاتزان فإن طاقة وضعه تعطى بالعلاقة:

$$U = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} (2450 \text{ N/m})(0.05 \text{ m})^2 = 3 \text{ J}$$

8-5 العلاقة بين طاقة الوضع والقوى المحافضة

عرفنا في الفقرة السابقة طاقة وضع جسم خاضع لقوة الجاذبية فقط بالعلاقة:

$$U_g = mgy$$

حيث يدل الرمز الأسفل g إلى أن هذه الطاقة ناتجة عن كون الجسم موجوداً في منطقة خاضعة لقوة الجاذبية وهذا ما يطلق عليه عادة اسم مجال الجاذبية (*gravitational field*). وبكتابة قوة الجاذبية المؤثرة على جسم بالشكل:

$$\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$$

وافترض الاتجاه الموجب للأعلى يمكن الحصول على طاقة وضع الجاذبية من قوة الجاذبية بالتكامل:

(20-5)

$$U_g = -\int_0^y \mathbf{F}_g \cdot d\mathbf{y}$$

وترتبط هذه العلاقة بين قوة الجاذبية وطاقة الوضع الناتجة عنها. وسنرى بعد قليل أنه عندما نعرف قوة التجاذب بين جسمين من قانون الجاذبية العالمي فإن العلاقة السابقة تبقى صحيحة باستثناء حدود التكامل التي يجب أن تكون دائماً من الموضع الذي تكون عنده طاقة وضع الجسم معدومة، أي $U(y_1=0)$ ، إلى الموضع y المراد حساب طاقة الوضع عنده.

8-5 العلاقة بين طاقة الوضع والقوى المحفوظة

وبنفس الشكل نربط بين القوة وطاقة الوضع لجسم مربوط بزنبك عندما يكون على بعد x من وضع الاتزان بملاحظة أن القوة المؤثرة عليه هي $F_{sp} = -kx$ ، كما أن طاقة وضعه $U_s = \frac{1}{2}kx^2$ ، ولذا يمكن الربط بينهما مباشرة على النحو:

$$(21-5) \quad U_{sp} = -\int_0^x \mathbf{F}_{sp} \cdot d\mathbf{x}$$

حيث افترضنا الاتجاه الموجب مع محور السينات الذي يتحرك عليه الجسم ووضعنا حدود التكامل من $x_1=0$ حيث $U_1=0$ إلى x حيث نريد معرفة طاقة الوضع. ويمكن استخلاص القوة من طاقة الوضع في حال الجاذبية أو قوة الإرجاع باشتقاق طاقة الوضع بالنسبة للموضع فنكتب:

$$(22-5) \quad F = -\frac{dU}{dx}$$

ويمكن تعميم العلاقة السابقة عندما يتحرك الجسم في الفضاء بحيث يتحدد موضعه بثلاثة إحداثيات (x,y,z) وتصير طاقة وضعه معتمدة عليها، أي أن $U = U(x,y,z)$ ، ويصير للقوة المؤثرة على الجسم ثلاث مركبات تعطى بالعلاقة:

$$(23-5) \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad \text{و} \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad \text{و} \quad F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

حيث يدل الرمز على الاشتقاق الجزئي لطاقة الوضع بالنسبة للإحداثي المعني.

مثل 6-5

يخضع جسم لقوة إرجاع تعطى بالعلاقة $F = -3x - 5x^2$. ما طاقة وضعه عند $x=2$ ؟
الحل: بتطبيق (21-5) نجد:

$$U(x) = -\int_0^x F dx = -\int_0^x (-3x - 5x^2) dx = \left[\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3 \right]_0^x = 19.3 \text{ J}$$

ونلاحظ أننا وضعنا الحد الأدنى للتكامل عند $x_1=0$ حيث يكون $U(x)=0$.

مثل 7-5

يخضع جسم لقوة مركزية جاذبة تعطى بالعلاقة $F = -k/r^2$ حيث k ثابت. ما طاقة وضع الجسم عند أي موضع r ؟

الحل: بتطبيق (21-5) نجد:

$$U(r) = -\int_{\infty}^r \left(-\frac{k}{r^2}\right) dr = \left| -\frac{k}{r} \right|_{\infty}^r = -\frac{k}{r}$$

حيث نلاحظ مرة أخرى أننا وضعنا الحد الأدنى للتكامل عند $r = \infty$ حيث يكون $U(r) = 0$.

9-5 الطاقة الميكانيكية الكلية (Total Mechanical Energy)

وجدنا في الفقرة (7-5) أنه عندما ينتقل جسم بين نقطتين ارتفاع الأولى y_1 والثانية y_2 تحت تأثير قوة الجاذبية فقط فإن الشغل الذي تقوم به هذه القوة هو:

$$W_g = U_1 - U_2$$

حيث U_1 و U_2 طاقتي وضع الجسم عند النقطتين 1 و 2، على الترتيب. ولكن بحسب نظرية الشغل والطاقة فإن هذا الشغل يساوي تغير طاقة الحركة للجسم بينهما، أي أن:

$$W_g = K_2 - K_1$$

ومن ثم نستنتج من العلاقتين السابقتين أنه عندما يتحرك جسم تحت تأثير قوة الجاذبية فقط يكون:

$$(24-5) \quad K_2 - K_1 = U_1 - U_2$$

أي أن:

$$(25-5) \quad K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

ونلاحظ أن الطرف الأيمن يمثل مجموع طاقة الحركة والوضع عند النقطة الأولى، بينما يمثل الطرف الأيسر هذا المجموع عند النقطة الثانية. فإذا رمزنا لـ $K+U$ بـ E وأطلقنا عليه اسم **الطاقة الميكانيكية الكلية**، أي أن:

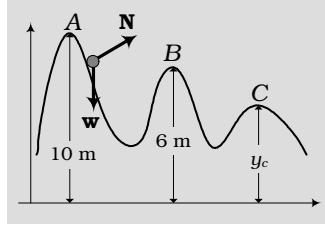
$$(26-5) \quad E = K + U$$

عندئذ نكتب (25-5) بالشكل:

$$(27-5) \quad \Delta E = E_2 - E_1 = 0$$

فالطاقة الميكانيكية الكلية عند النقطة الأولى تساوي الطاقة الميكانيكية الكلية عند النقطة الثانية، لذا نقول إنه عندما يتحرك جسم تحت تأثير قوة الجاذبية فقط فإن طاقته الميكانيكية الكلية لا تتغير. هذه حالة خاصة من مبدأ حفظ الطاقة الميكانيكية الكلية.

مثل 8-5



الشكل (11-5)

ينزلق جسم كتلته 1 kg على المنحني الموضح بالشكل (11-5) مبتدئاً عند A من السكون. ماسرعه عند B وما ارتفاع C إذا وصل إليها بسرعة 2 m/s بفرض أن الاحتكاك مهملاً؟

الحل: نلاحظ من الشكل (11-5) أن الجسم يخضع لقوتين فقط هما وزنه وهي قوة محافظة، ورد فعل السطح الذي وجدنا سابقاً أن شغله يساوي الصفر دوماً أي يمكن اعتبار رد فعل السطح قوة محافظة. ومن ثم فالطاقة الميكانيكية الكلية محفوظة ونكتب:

$$E_A = E_B = E_C$$

ولكن

$$U_A = mgy_A \quad K_A = 0 \Rightarrow E_A = mgy_A$$

لأن $v_A = 0$. كما أن:

$$E_B = mgy_B + \frac{1}{2}mv_B^2$$

وبوضع $E_A = E_B$ والتعويض عن القيم المعطاة نجد $v_B = 8.8$ m/s. وبنفس الشكل، نكتب طاقة النقطة C:

$$E_C = \frac{1}{2}mv_C^2 + mgy_C = E_A$$

وبملاحظة أن $v_C = 2$ m/s وتعويض القيم المعطاة نجد $y_C = 9.8$ m.

ويمكن أيضاً استخلاص مبدأ حفظ الطاقة لجسم خاضع لقوة إرجاع الزنبرك. فقد وجدنا أن قوة المرونة هي قوة محافظة، كما أن الشغل الذي تقوم به عندما ينتقل جسم من نقطة تبعد مسافة x_1 عن وضع الاتزان لنقطة ثانية x_2 يساوي:

$$W_{sp} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2$$

ولكن طاقة الوضع عند x هي $U = \frac{1}{2}kx^2$ ولذا يصير الشغل مساوياً إلى:

$$W = U_1 - U_2$$

ولكن بحسب نظرية الشغل والطاقة فإن:

$$W = K_2 - K_1$$

أي أن:

$$U_1 - U_2 = K_2 - K_1 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

ونكتب العلاقة الأخيرة بدلالة الطاقة الميكانيكية الكلية E على النحو:

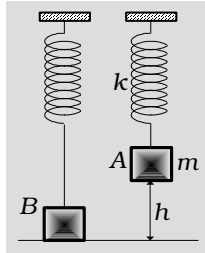
(28-5)

$$\Delta E = E_2 - E_1 = 0$$

فالطاقة الميكانيكية الكلية ثابتة أيضاً في هذه الحالة لأن القوة المؤثرة على الجسم هي قوة محافظة.

ونستنتج مما تقدم مبدأ حفظ الطاقة الذي ينص على أنه إذا تحرك جسم تحت تأثير قوى محافظة فإن طاقته الميكانيكية الكلية لا تتغير.

مثل 9-5



الشكل (5-12)

يعلق زنبرك ثابت مرونته 98 N/m بوضع شاقولي بحيث تبقى نهايته السفلى حرة ويعلق بها جسم صغير كتلته 0.5 kg ويُمسك باليد حتى لا يستطيل الزنبرك بتاتا. ما أكبر مسافة يسقطها الجسم عند إفلاته؟

الحل: نفترض أن مستوى الأرض يقع عند أخفض نقطة يصل إليها الجسم، كما في الشكل (5-12)، عندئذ تصير الطاقة الميكانيكية الكلية عند الموضع الابتدائي:

$$E_A = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgy_A = mgh$$

وعند أخفض نقطة يستطيل الزنبرك أكبر ما يمكن عند مسافة $x = h$ حيث تصير سرعته هناك صفراً، لذا نكتب طاقة الجسم الكلية:

$$E_B = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgy_B + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kh^2$$

وبما أن الجسم لا يخضع إلا لقوتي الجاذبية والإرجاع لذا تبقى طاقته الميكانيكية ثابتة، أي أن:

$$\Delta E = 0 \Rightarrow E_B - E_A = 0 \Rightarrow E_A = E_B$$

وبتعويض القيم المعطاة نجد:

$$mgh = \frac{1}{2}kh^2 \Rightarrow h = \frac{2mg}{k} = 0.1 \text{ m}$$

10-5 الشكل العام لمبدأ حفظ الطاقة الميكانيكية الكلية

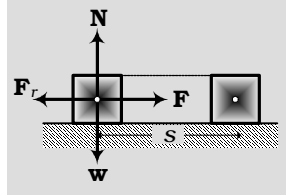
وجدنا في الفقرة السابقة أنه إذا خضع جسم أو منظومة لقوى محافظة فإن الطاقة الميكانيكية الكلية تبقى ثابتة نظراً لعدم ضياعها بأي شكل من الأشكال. لكن إذا كانت هناك قوى مضيعة للطاقة، كالاتكاك، فإن E لا تبقى كما هي خلال انتقال المنظومة من وضع أول لوضع ثاني، ولذلك نعرف القوى غير المحافظة بأنها القوى التي لاتحافظ على طاقة الجسم أو النظام الذي تؤثر عليه، ويعتمد شغلها على الطريق الذي يسلكه الجسم، لأن الشغل يعتمد على المسافة. فقوة الاحتكاك مثلاً تضيع طاقة أكبر لو تحرك الجسم الخاضع لها بين نقطتين على طريق متعرج بدلاً من الانتقال مباشرة.

ونستنتج مما تقدم أنه إذا تحرك جسم خاضع لقوى محافظة وغير محافظة فإن طاقته الميكانيكية الكلية تتغير بمقدار الشغل الذي تبذله القوى غير المحافظة، أي أن:

(29-5)

$$\Delta E = W'$$

حيث تدل W' على شغل كل القوى غير المحافظة المؤثرة على النظام. ولأبأس من التنويه إلى أن تحديد القوى المحافظة وغير المحافظة ليس بالأمر السهل دوماً ولذلك سنعتمد في هذا الكتاب وعلى هذا المستوى من المادة أن كل القوى غير محافظة باستثناء قوتي الجاذبية والإرجاع (لأننا أخذنا شغل كل واحدة منهما بعين الاعتبار من خلال طاقة وضع الجسم). وعندها يكون W' شاملاً لشغل كل القوى ماعداهما.



الشكل (13-5)

مثال 10-5

يُشد رجلٌ صندوقاً كتلته 50 kg أفقياً بدءاً من السكون مسافة 20 m على أرض خشنة معامل احتكاكها معه 0.2 فتصير سرعة

الصندوق 20 m/s. استخدم مبدأ حفظ الطاقة لتحديد قوة شد الرجل.
الحل: نوضح في الشكل (5-13) انتقال الصندوق والقوى المؤثرة عليه، ونكتب من مبدأ حفظ الطاقة:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = W'$$

حيث $E_1=0$ لأن الصندوق كان ساكناً في البداية فليس له طاقة حركة، وموضوع على الأرض فارتماعه يساوي الصفر فإلأطاقة وضع له أيضاً. كما أن $E_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$ لأن الصندوق لا يزال على نفس المستوى وتبقى طاقة وضعه معدومة.
 أما شغل القوى غير المحافظة فيشمل شغل الشد والاحتكاك، بينما لا يوجد شغل لرد فعل السطح كما ذكرنا سابقاً، ولذلك نكتب:

$$W' = W_T + W_{F_k}$$

حيث شغل الشد $W_T = Ts$ ، وشغل الاحتكاك $W_{F_k} = -F_k s = -\mu_k mgs$ ، وتصير علاقة حفظ الطاقة:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - 0 = Ts - \mu_k mgs$$

وبتعويض القيم المعطاة نجد $T \approx 600 \text{ N}$.

11-5 طاقة وضع قوة الجاذبية العامة

عرفنا في الفقرة (5-6) طاقة وضع جسم على ارتفاع h عن سطح الأرض بالشكل mgh لكن هذا التعريف غير دقيق تماماً بسبب تغير قيمة تسارع الجاذبية مع الارتفاع، كما وجدنا في الفصل السابق. ولذلك سنعيد تعريف طاقة وضع الجاذبية لمنظومة مؤلفة من جسمين أو أكثر. فنكتب قوة الجاذبية التي تخضع لها كتلة صغيرة m_1 على بعد r من كتلة صغيرة أخرى m_2 على النحو:

$$\mathbf{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \mathbf{r}_1$$

حيث \mathbf{r}_1 متجه وحدة من m_2 إلى m_1 .

وباستخدام (5-21) نكتب طاقة وضع المنظومة المؤلفة من m_1 و m_2 بالشكل:

$$U = -\int_{r_0}^r \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_0}^r -\frac{Gm_1m_2}{r^2} dr \quad (30-5)$$

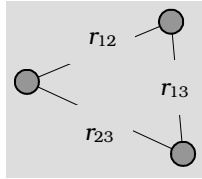
11-5 طاقة وضع قوة الجاذبية العامة

وباختيار الموضع الابتدائي $r_0 = \infty$ حيث تتعدم القوة المتبادلة بين الجسمين ويكون عندها $U(\mathbf{r}_0)=0$ نجد:

$$(31-5) \quad U = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$

وتعطي هذه النتيجة طاقة وضع النظام المؤلف من الكتلتين معاً إذ لو اختفت إحداهما لاختفت طاقة الوضع مباشرة. وبنفس الشكل يمكن البرهان أن طاقة وضع منظومة مؤلفة من عدة أجسام تعطى بالعلاقة:

$$(32-5) \quad U = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} - \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} - \frac{Gm_1m_4}{r_{14}} - \frac{Gm_2m_3}{r_{23}} - \frac{Gm_2m_4}{r_{24}} - \frac{Gm_2m_5}{r_{25}} - \dots - \frac{Gm_{j-1}m_j}{r_{j-1,j}} - \frac{Gm_{j+1}m_j}{r_{j+1,j}} - \dots - \frac{Gm_{i-1}m_i}{r_{i-1,i}} - \frac{Gm_{i+1}m_i}{r_{i+1,i}} - \dots - \frac{Gm_{n-1}m_n}{r_{n-1,n}} - \frac{Gm_nm_n}{r_{nn}}$$



الشكل (14-5)

حيث r_{ij} المسافة بين الجسمين i و j ، كما في الشكل (14-5). وتمثل U في العلاقة السابقة مقدار الشغل الذي تبذله قوة الجاذبية لوضع هذه الجسيمات قرب بعضها بهذا الشكل.

مثل 11-5

ماتاطاقة وضع منظومة مؤلفة من ثلاث كتل متساوية كتلة الواحدة 10 kg موضوعة على رؤوس مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 10 cm ، وما الشغل اللازم لانتزاع إحدى هذه الكتل إلى مالانهاية؟

الحل: نستخدم (32-5) ونكتب:

$$U = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} - \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} - \frac{Gm_2m_3}{r_{23}}$$

وبتعويض الكتل والمسافات نجد $U = -2 \times 10^{-7} \text{ J}$.

الآن، عندما ننزع إحدى الكتل ونبعدها إلى مالانهاية تصير طاقة وضع المنظومة:

$$U' = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} = -0.7 \times 10^{-7} \text{ J}$$

ويكون الشغل المبذول لإبعاد الكتلة مساوياً للفرق بين الطاقتين، أي:

$$W = U' - U = 1.3 \times 10^{-7} \text{ J}$$

12-5 الطاقة الميكانيكية الكلية للأقمار والكواكب

وجدنا سابقاً أن الكواكب والأقمار تتحرك في مسارات قطوع ناقصة حول مركز جاذبها (كالشمس في حالة الكواكب، والكواكب في حالة الأقمار). وسنفترض في هذه الفقرة أن مسار كوكب (كالأرض) أو قمر ما m حول مركز جاذبه M دائري تماماً ونصف قطره r ، وأن مركز الجذب كبير جداً بحيث يمكن اعتباره ساكناً دوماً (وهذا تقريب معقول في حالة دوران الأرض حول الشمس أو قمر صناعي حول الأرض). وعندها نكتب الطاقة الميكانيكية الكلية لـ m على النحو:

$$(33-5) \quad E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r}$$

ونظراً لأن الجسم يتحرك على مسار دائري فإن قوة الجذب المؤثرة عليه مركزية وقيمتها:

$$(34-5) \quad F = \frac{mv^2}{r} = \frac{GmM}{r^2}$$

أي أن:

$$(35-5) \quad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GmM}{2r}$$

وتصير الطاقة الكلية للجسم:

$$(36-5) \quad E = -\frac{GmM}{2r}$$

ونلاحظ أن الطاقة الكلية سالبة وتتعدم عندما يصير الجسم على بعد كبير من مركز الجذب بحيث يمكن اعتبار $r \rightarrow \infty$ ، ولذلك نقول إن الجسم **مقيد** بمركز الجذب أو **مرتبط** به (*bound*) طالما أنه قريب منه.

وإذا أردنا للجسم أن يفلت من ارتباطه بمركز جاذبه فيجب أن نعطيه طاقة أكبر أو تساوي على الأقل طاقة ارتباطه (36-5).

مثل 12-5 سرعة الإفلات (escape velocity)

يُطلق قمر صناعي كتلته m من سطح الأرض بسرعة v_0 . ما أعلى ارتفاع سيصل إليه وماذا يجب أن تكون v_0 حتى لايعود إلى الأرض مطلقاً؟

الحل: نكتب أن الطاقة الكلية للقمر عند سطح الأرض E_R تساوي طاقته عند أعلى ارتفاع r_{max} يصل إليه، أي أن $E_R = E_{r_{max}}$ حيث:

$$E_R = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GmM}{R}$$

وعندما يصير القمر الصناعي عند أعلى ارتفاع تصير سرعته تساوي الصفر وطاقته الكلية طاقة وضع، أي:

$$E_{r_{max}} = -\frac{GmM}{r_{max}}$$

ولذلك يكون:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GmM}{R} = -\frac{GmM}{r_{max}}$$

ولتحديد السرعة الابتدائية اللازمة ليفلت القمر من جاذبية الأرض نضع $r_{max} \rightarrow \infty$ في العلاقة السابقة فنجد (لاحظ أن تسارع الجاذبية قرب سطح الأرض هو $g_R = GM/R^2$):

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2g_R R}$$

وتساوي في حالة الأرض حوالي 11 km/s!

مثل 13-5 أين mgh في طاقة الوضع لجسم على ارتفاع h فوق سطح الأرض

عرفنا سابقاً طاقة وضع جسم على ارتفاع h فوق سطح الأرض بـ mgh والآن نقول إنها $-GmM/r$ حيث M كتلة الأرض و r بعد الجسم عن مركز الأرض، فأيهما الصحيح؟

الحل: كلاهما. ومانعني بـ mgh إنما الفرق في طاقة الوضع عندما يكون الجسم على سطح الأرض تماماً وعندما يكون على ارتفاع h صغير بالمقارنة مع نصف قطر الأرض. ويمكن استنتاج ذلك بكتابة (5-31) في الحالة الأولى على النحو:

$$U_1(r = R) = -\frac{GmM}{R}$$

وفي الحالة الثانية:

$$U_2(r = R + h) = -\frac{GmM}{R + h}$$

ونلاحظ أن الفرق بين هاتين الطاقتين هو:

$$U_2(r = R + h) - U_1(r = R) = -\frac{GmM}{R + h} - \left(-\frac{GmM}{R}\right) = \frac{GmM}{R} \left(1 - \frac{R}{R + h}\right)$$

فإذا كان $h \ll R$ عندئذ يمكن أن نكتب

$$1 - \frac{R}{R + h} = \frac{h}{R + h} = \frac{h}{R(1 + h/R)} \approx \frac{h}{R}$$

حيث نهمل الحد h/R بالمقارنة مع الواحد. ويصير الفرق في طاقة الوضع مساوياً إلى:

$$\Delta U = \frac{GmM}{R} \frac{h}{R} = m \left(\frac{GmM}{R^2}\right) R$$

ولكن $g_R = GM/R^2$ تسارع الجاذبية عند سطح الأرض. ولذلك بوضع $\Delta U \equiv U$ التي تدل على طاقة وضع الجسم بالنسبة لسطح الأرض، نجد:

$$U = mgh$$

وهو المطلوب إثباته.

13-5 القدرة (power)

لنفترض أننا نراقب عمالاً يحملون أكياس رمل من الطابق الأول للطابق الخامس من بناء. فنرى عمالاً يرفع أربعين كيساً خلال ساعة ونصف، وآخر يرفع خمسة وعشرين كيساً بخمس وخمسين دقيقة، وثالث يرفع كيسيْن كل أربع دقائق. ونتساءل أيهم أكثر كفاءة؟ لاشك بأن الإجابة مباشرة صعبة بعض الشيء لكن لو حسبنا الشغل الذي يقوم به كل عامل خلال نفس الزمن لصار بالإمكان مقارنتهم. لذلك نعرف القدرة المتوسطة (average power) بأنها الشغل المبذول على الزمن اللازم لبدله، أي:

(37-5)

$$P_{av} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

وتعطى وحدة القدرة بـ جول/ثانية=وات (W=J/s). وكثيراً ما نستخدم الكيلووات (kW=10³ W) أو ميغاوات (MW=10⁶ W) للتعبير عن القدرة الكهربائية المستهلكة في المنازل والمصانع. وإذا افترضنا أن القوة المؤثرة على جسم أو منظومة غير ثابتة عندئذ يكون شغلها متغيراً من موضع لآخر ولذا نعرّف القدرة اللحظية (instantaneous power) بالعلاقة:

$$(38-5) \quad P = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

14-5 العلاقة بين القدرة اللحظية والسرعة

إذا خضع جسم لقوة \mathbf{F} خلال قطعه مسافة $\Delta \mathbf{s}$ في زمن Δt عندئذ نكتب القدرة المتوسطة لهذه القوة بالشكل:

$$P_{av} = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{s}}{\Delta t} = \mathbf{F} \cdot \frac{\Delta \mathbf{s}}{\Delta t} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_{av}$$

حيث \mathbf{v}_{av} السرعة المتوسطة للجسم خلال انتقاله للمسافة $\Delta \mathbf{s}$. ومن ثم يمكن أن نكتب القدرة اللحظية لهذه القوة مباشرة بتعويض السرعة اللحظية بدلاً من السرعة المتوسطة، أي:

$$(39-5) \quad P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

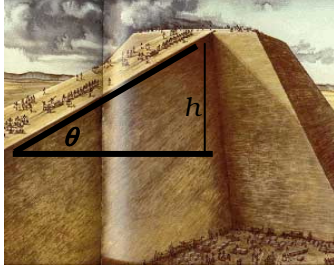
ونلاحظ من العلاقة الأخيرة، أن القدرة، كالسرعة، تعتمد على المراقب أو مناط الإسناد في تحديدها. فمثلاً إذا كان هناك شخص يحمل جسماً في مصعد يتحرك للأعلى بسرعة ثابتة فإنه لا يصرف قدرة على هذا الجسم بالنسبة لمراقب معه في نفس المصعد لأن سرعة الجسم تساوي الصفر بالنسبة له. أما بالنسبة لمراقب خارج المصعد فإن الشخص يبذل قدرة "موجبة" على الجسم بينما تبذل الجاذبية قدرة "سالبة".



عبد الله: أصغر آلة بشرية

15-5 الآلات ومردودها (Efficiency)

كان الإنسان القديم أول آلة في الطبيعة، فكان يكسر الحجارة وينقلها من مكان لآخر، ويقطع الأشجار وبحرث الأرض، وهكذا. ومما لاشك فيه أن هذا ليس بالأمر السهل ويتطلب قوة وجهداً كبيرين. ولذلك قام الإنسان بتصنيع آلات تساعد في عمله كرفع الأجسام ونقلها وغيره.



الشكل (5-15)

ومن أبسط الآلات التي استخدمها الإنسان المستوي المائل حيث يمكن سحب جسم عليه لارتفاعات مختلفة مع بذل قوة صغيرة نسبياً. وقد استخدم العمال المصريون القدماء هذه الوسيلة لبناء الأهرامات، إذ قاموا برفع تلك الحجارة الضخمة بواسطة مستويات مائلة يزداد طولها مع ارتفاع الهرم، كما في الشكل (5-15) الذي نلاحظ منه أن الشغل اللازم لرفع حجر كتلته m لارتفاع h يساوي mgh لكن القوة المبدولة

سكون mg لورفعناه للأعلى مباشرة أو $mg\sin\theta$ لو سحبناه على المستوي المائل. وبالطبع فكلما قل هذا الميل كلما صارت القوة المطلوبة أقل، وهذا مهم حتى يمكن رفع تلك الأحجار الثقيلة إلى تلك الارتفاعات.

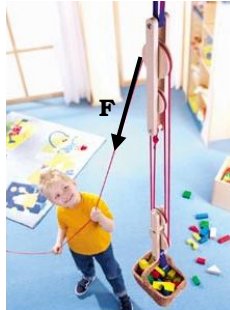
ومن الآلات الأخرى التي كانت أول ما استخدم الإنسان الحجر والعصا التي تطورت لرافعة السيارة في العصر الحديث، كما في الشكل (5-16)، حيث تطبق قوة F_1 عند الطرف البعيد ليد



الشكل (5-16)

الجهاز المرتكزة عند O فترفع السيارة الثقيلة F_2 عند النهاية الأخرى القريبة. وسنرى لاحقاً أن عزم قوة يتناسب طردياً مع ذراعها وهذا ما توفره هذه الآلة البسيطة لأن ذراع F_1 أكبر من ذراع F_2 وبالتالي يمكن رفع (أو تدوير) جسم كتلته أكبر من القوة F_1 بهذه الوسيلة الفعالة.

وهناك أيضاً آلة بسيطة هي البكرة والحبل (آلة أتوود) التي تستخدم لرفع الأجسام حيث يربط الجسم المراد رفعه بحبل يمر حول البكرة المثبتة عند الوضع المطلوب رفع الجسم إليه، بينما يُسحب الطرف الآخر للحبل وهو يميل بزاوية كبيرة حتى تكون القوة اللازمة أصغر من وزن الجسم، كما في الشكل (5-17).



الشكل (5-17)

وتتميز الآلات عن بعضها بمردودها (*efficiency*) الذي يساوي نسبة الطاقة المأخوذة من الآلة (W_{in}) إلى الطاقة المعطاة لها (W_{out})، أي أن:

(40-5)

$$e = \frac{W_{out}}{W_{in}}$$

فإذا قامت آلة أو شخص بعمل ولم يستفاد إلا من جزء منه فإن مردود هذه الآلة أو الشخص يساوي نسبة ماتم من الشغل إلى الشغل الفعلي المبذول. ومما لاشك فيه أن مردود أي آلة أو شخص يتناقص مع الزمن أو سوء الاستخدام أو التصنيع. فإذا كان الاحتكاك على المستوي المائل في الشكل (5-15) أو مع البكرة في الشكل (5-17)، مثلاً، عالياً فإن جزءاً كبيراً من الطاقة سيضيع بدون فائدة. وكذلك الحال إذا كان محرك سيارة قديماً، أو أن عجلاتها ليست ممثلةً بالهواء بشكل صحيح، مما يسبب إهدار الوقود باستمرار.

مثل 5-14

يُستعمل محرك قدرته 10 kW لرفع مصعد كتلته 1800 kg مسافة 10 m. ما شغل هذا المحرك خلال رفع المصعد إذا كان مردوده 60% وما الزمن الذي سيستغرقه لرفع المصعد؟
الحل: لنحسب الشغل الذي نريد المحرك أن يقوم به وهو رفع المصعد مسافة 10 m فنكتب:

$$W_{out} = mgh = (1800 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(10 \text{ m}) = 17.6 \times 10^4 \text{ J}$$

وبما أن مردود المحرك 60% لذلك نجد الشغل الذي يستهلكه المحرك:

$$e = \frac{W_{out}}{W_{in}} = 0.6 \Rightarrow W_{in} = \frac{W_{out}}{0.6} = 29.4 \times 10^4 \text{ J}$$

فالمحرك يستهلك 294 kJ حتى يعطينا 176 kJ وهذه خسارة كبيرة للطاقة! أما الزمن اللازم لرفع المصعد فنجدته بكتابة:

$$P = \frac{W_{out}}{t} \Rightarrow t = \frac{W_{out}}{P} = \frac{17.6 \times 10^4 \text{ J}}{10 \times 10^3 \text{ W}} = 17.6 \text{ s}$$

من علماء الإسلام

هو ابن عبد الله محمد بن سنان المعروف باسم **البتاني** (243-317 هـ). يعتبر من أعظم فلكيي العالم، وضع نظريات مهمة في الفلك والجبر وحساب المتلثات. واشتهر برصد الكواكب والأجرام السماوية على الرغم من عدم توافر الآلات الدقيقة وتمكن من جمع أرصاد ما زالت محل إعجاب العلماء وتقديرهم. ترك عدة مؤلفات في علوم الفلك والجغرافيا. وله جداوله الفلكية المشهورة التي تعتبر من أصح الزيج حتى الآن. كان ضليعاً في المتلثات وأدخل اصطلاح جيب التمام. من أهم منجزاته الفلكية أنه أصلح قيم الاعتدالين الصيفي والشتوي، وعين قيمة ميل فلك البروج على فلك معدل النهار (أي ميل محور دوران الأرض حول نفسها على مستوى دورانها حول الشمس). ووجد أنه يساوي $23^\circ 35'$ وقاس طول السنة الشمسية بدقة عالية وصلت لدقيقتين و22 ثانية فقط.



البتاني

ملخص الفصل

| | |
|---|--------------------------------|
| $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = Fs \cos \phi$ | شغل قوة ثابتة |
| $W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B F ds \cos \phi$ | شغل قوة متغيرة |
| $K = \frac{1}{2} mv^2$ | الطاقة الحركية |
| $U(y) = mgy$ | طاقة الوضع لقوة الجاذبية |
| $U(x) = \frac{1}{2} kx^2$ | طاقة الوضع لقوة الإرجاع |
| $W_T = K_2 - K_1$ | نظرية الشغل والطاقة |
| $E = K + U$ | الطاقة الميكانيكية |
| $\Delta E = 0$ | حفظ الطاقة للقوى المافضة |
| $\Delta E = W'$ | حفظ الطاقة للقوى غير المحافظة |
| $U(r) = -Gm_1m_2 / r$ | طاقة الوضع في مجال الجاذبية |
| $E = \frac{1}{2} mv^2 - GmM / r$ | الطاقة الكلية في مجال الجاذبية |
| $v_{esc} = \sqrt{2g_R R}$ | سرعة الإفلات |
| $P_{av} = \Delta W / \Delta t$ | القدرة المتوسطة |
| $P = dW / dt$ | القدرة اللحظية |
| $e = W_{out} / W_{in}$ | مردود الآلة |

تمارين ومسائل

الشغل

- 1-5** تحتاج سيارة لقوة 300 N لتتحرك على طريق أفقية. ما الشغل اللازم لدفعها مسافة 5 m؟
- 2-5** ما الشغل الذي يقوم به ربايع في رفعة الخطف عندما يرفع 260 kg مسافة 2 m؟ وكم يعمل للبقاء في ذلك الوضع لمدة 20 ثانية؟
- 3-5** ما الشغل اللازم لقص قطعة خشب بمنشار يحتاج لقوة 40 N لدفعه مسافة 15 cm للأمام والخلف؟
- 4-5** يتحرك جسم مسافة 2 m تحت تأثير قوة أفقية مقدارها 2 N وقوة احتكاك 0.4 N. ما شغل كل قوة؟

5-5 يسحب عامل صندوقاً كتلته 2 kg على أرض أفقية خشنة مسافة 20 m بقوة مقدارها 50 N وتصنع زاوية 37° فوق الأفق. ما شغل كل قوة مؤثرة على الصندوق إذا كانت قيمة قوة الاحتكاك 15 N؟

6-5 ما السرعة التي سيصل إليها الصندوق المذكور في المسألة السابقة بعد قطع مسافة 20 m؟
7-5 يشد رجل عربة كتلتها 150 kg على أرض أفقية خشنة مسافة 1.5 m بسرعة ثابتة بواسطة حبل يصنع زاوية 30° فوق الأفق. ما شغل الرجل، علماً بأن معامل الاحتكاك بين العربة والأرض 0.1؟

8-5 يُدفع جسمٌ كتلته 10 kg مسافة 5 m على أرض أفقية خشنة معامل احتكاكها 0.25 بواسطة قوة أفقية مقدارها 100 N تصنع زاوية 30° فوق الأفق. ما شغل كل قوة مؤثرة على الجسم؟
9-5 يُسحب صندوق كتلته 40 kg بسرعة ثابتة مسافة 5 m على أرض أفقية خشنة معامل احتكاكها معه 0.25 بواسطة قوة **F** تصنع زاوية 30° تحت الأفق. (أ) ما شغل كل قوة مؤثرة؟ (ب) ما قيمة **F**؟

10-5 يشد عامل صندوقاً بقوة 50 N ترتفع زاوية 30° فوق الأفق مسافة 3 m بينما تعاكسه قوة احتكاك مقدارها 40 N. ما الشغل المبذول على الصندوق؟

شغل قوة متغيرة

11-5 يُجذب جسم على محور السينات بقوة $F(x) = -6x^3$. (أ) ما قيمة **F** اللازمة لإبقاء الجسم على بعد 1 m من المبدأ؟ (ب) ما الشغل اللازم لنقل الجسم من $x_1 = 1$ m إلى $x_2 = 2$ m إذا كان معامل الاحتكاك بينه وبين الأرض 0.25؟

12-5 يخضع جسم يتحرك على المحور ox لقوة متغيرة $F(x) = -24/x^4$. برهن أن شغل هذه القوة عندما يسير الجسم على طريق مغلقة بحيث ينتهي عند نقطة البداية يساوي الصفر. (ب) جد شغل **F** عندما ينتقل الجسم من $x = 2$ m إلى اللانهاية.

13-5 ما شغل القوة $F(x) = 2x^3 + 8x$ التي تحرك جسم على محور السينات من $x_1 = 0$ إلى $x_2 = 2$ ؟ **m**

14-5 يُعلق صندوق كتلته 230 kg بحبل طوله 12 m مثبت بالسقف ثم يُدفع جانباً مسافة 1.2 m بواسطة قوة أفقية دائمة. (أ) ما قيمة القوة اللازمة لإبقائه في ذلك الوضع؟ (ب) ما الشغل المبذول لإبقائه في ذلك الوضع؟ (ج) ما شغل كل من الجاذبية والشد والقوة الأفقية خلال انتقال الجسم مسافة 1.2 m؟ (د) ما الشغل الكلي المبذول خلال هذا الانتقال؟

- 15-5** يخضع جسم كتلته 1 kg يتحرك على محور السينات لقوة $F(x) = -3x - 5x^2$. (أ) ما طاقة وضع الجسم عندما يكون عند $x=2$ m؟ (ب) ما أقصى مسافة سيقطعها الجسم على محور السينات إذا كانت سرعته -4 m/s عندما كان في الموضع $x=5$ m؟
- 16-5** تُلقى سلسلة طولها l وكتلتها m على طاولة أفقية بحيث يتدلى $1/5$ منها من حافة الطاولة. برهن أن الشغل اللازم لسحب هذا الجزء لسطح الطاولة يساوي $mgl/50$.

قوة الإرجاع

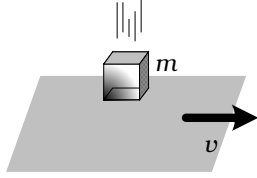
- 17-5** تستطيل مطاطة بمقدار 5 cm تحت تأثير قوة 4 N و 15 cm تحت تأثير قوة 8 N. هل تحقق المطاطة قانون هوك في المرونة؟
- 18-5** يبلغ الطول الطبيعي لزنبرك 15 cm وثابت مرونته 150 N/m. ما القوة اللازمة لشده ليصير طوله 30 cm؟
- 19-5** ينضغط ميزان زنبركي 1 cm عندما تقف سيدة كتلتها 60 kg عليه. ما ثابت مرونة الزنبرك وما الشغل المبذول عليه خلال انضغاطه؟
- 20-5** تتصل إطارات السيارة بهيكلها بواسطة أربعة زنبركات عالية المرونة (*shock absorbers*) لتتحمل الصدمات التي تتعرض لها. ما مقدار انضغاط كل زنبرك في سيارة كتلتها 1200 kg إذا كان ثابت مرونة الزنبرك الواحد 20 kN؟
- 21-5** يُعلق جسم كتلته 1.5 kg بنهاية زنبرك مربوط شاقولياً بالسقف فيستطيل مسافة 0.2 m. (أ) ما ثابت مرونة الزنبرك؟ (ب) ما قيمة واتجاه قوة الزنبرك عندما يُسحب الجسم المعلق مسافة 10 cm للأسفل بعيداً عن وضع الاتزان؟ (ج) صف حركة الجسم عندما يُترك من وضعه الجديد وهو معلق بالزنبرك.
- 22-5** ما مقدار انضغاط كل زنبرك في سيارة كتلتها 1200 kg إذا رُفعت لعلو 0.8 m وتركت لتسقط على إطاراتها إذا كان ثابت مرونة كل زنبرك 70 kN؟

نظرية الشغل والطاقة

- 23-5** يتحرك جسم كتلته 2 kg على أرض أفقية ملساء بواسطة قوة أفقية مقدارها 2 N. استخدم نظرية الشغل والطاقة لحساب السرعة النهائية للجسم إذا كانت سرعته الابتدائية 10 m/s.
- 24-5** ما الطاقة الحركية لسيارة كتلتها 1200 kg تسير بسرعة 20 m/s؟ وكم تتغير هذه الطاقة عندما تتضاعف سرعة السيارة؟

25-5 يركض رجل وطفل بحيث أن الطاقة الحركية للرجل تساوي نصف الطاقة الحركية للطفل. عندما يزيد الرجل سرعته بمقدار 1 m/s تتساوى طاقته الحركية مع الطفل. ما السرعة الابتدائية لكل منهما إذا كانت كتلة الرجل ضعف كتلة الطفل؟

26-5 (أ) ما القوة اللازمة لرفع جسم كتلته 5 kg نحو الأعلى بسرعة ثابتة 4 m/s ؟ (ب) ماشغل هذه القوة عندما يرتفع الجسم مسافة 12 m ؟ (ج) ماتغير الطاقة الحركية للجسم؟



الشكل (5-18)

27-5 تسقط علبه كتلتها m على حزام نقل (conveyer belt) يتحرك بسرعة أفقية ثابتة v ، كما في الشكل (5-18). (أ) ما الفترة الزمنية اللازمة لتصل العلبه لحالة عدم انزلاق على الحزام إذا كان

معامل الاحتكاك السكوني بينهما μ_s والحركي μ_k ؟ (ب) ما المسافة التي تقطعها عليه خلال ذلك؟ (ج) ما الطاقة الضائعة خلال هذه الفترة؟

حفظ الطاقة الميكانيكية

28-5 يحاول شخص منع كتلة 45 kg من الانزلاق على مستو مائل طوله 1.5 m وارتفاعه 0.9 m بالتأثير عليها بقوة أفقية F لتتحرك بسرعة ثابتة. (أ) ماقيمة F إذا كان معامل الاحتكاك الحركي بين الكتلة والمستوي 0.1 ؟ (ب) ماشغل كل قوة مؤثرة على الكتلة خلال انزلاقها؟ (ج) ماتغير طاقتها الحركية؟

29-5 يُدفع جسم كتلته 2 kg على مستوي خشن مائل بزواوية 37° نحو الأعلى مسافة 20 m بواسطة قوة ثابتة موازية للمستوي مقدارها 120 N . (أ) ماشغل كل قوة مؤثرة على الجسم إذا كان معامل الاحتكاك 0.25 ؟ (ب) ما التغير في كل من الطاقة الحركية وطاقة الوضع والطاقة الميكانيكية للجسم؟

30-5 تخترق رصاصة كتلتها 30 g وسرعتها 50 m/s قطعة خشبية مسافة 12 cm . مامتوسط القوة التي أثرت على الرصاصة داخل الخشبة؟

31-5 من أي ارتفاع يجب أن يسقط جسم ليكتسب طاقة حركة مساوية لتلك عند سرعة 890 km/h ؟

32-5 ما الشغل المبذول لتسريع بروتون في سايكلوترون إلى $3 \times 10^7 \text{ m/s}$ ؟

33-5 تضغط كتلة 2 kg على زنبرك أفقي مهمل الكتلة ثابتته 200 N/m مسافة 15 cm ثم تترك لتتحرك مسافة 60 cm على طاولة أفقية خشنة وتقف. مامعامل الاحتكاك بين الكتلة والطاولة؟

34-5 يضع طفل كرة صغيرة كتلتها 10 g داخل فوهة مسدس زنبركي ثابت مرونته 500 N/m ويضغطها مسافة 5 cm. ما السرعة التي ستتطلق بها الكرة؟ كم ستكون لو تعرضت لقوة مقاومة 10 N؟

35-5 تسقط كتلة 2 kg من ارتفاع 40 cm على زنبرك ثابت مرونته 2000 N/m موضوع شاقولياً على أرض أفقية. ما أكبر مسافة سينضغطها الزنبرك؟

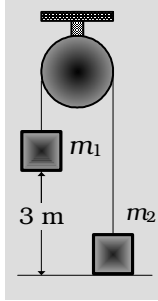
36-5 تُطلق قذيفة كتلتها 8 kg بسرعة 300 m/s وزاوية 45° مع الأفق، ثم تطلق قذيفة ثانية بنفس السرعة لكن بزاوية 90°. ما أعلى ارتفاع تصل إليه كل قذيفة؟ برهن أن الطاقة الميكانيكية الكلية للقذيفتين هي نفسها عند أي ارتفاع (استخدم الطاقة فقط).

37-5 تتدحرج كرة صغيرة كتلتها 0.1 kg عن سطح طاولة أفقية ارتفاعها 0.8 m فتصل للأرض بسرعة 5 m/s. ما سرعتها لحظة مغادرة الطاولة؟

38-5 يُذف حجر كتلته 1 kg من ذروة جبل ارتفاعه 200 m بسرعة 15 m/s تصنع زاوية 30° فوق الأفق. ما سرعته لحظة وصوله للأرض؟ (استخدم الطاقة فقط).

39-5 تسقط بيضة وزنها 0.5 N من سطح بناء ارتفاعه 15 m. ما سرعتها لحظة ارتطامها بالرصيف؟ ما متوسط القوة المؤثرة على البيضة لو سقطت على أرض رملية ناعمة فاخترقتها 30 cm لتقف؟

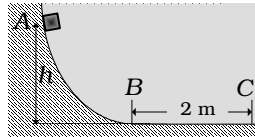
40-5 يجلس طفل على مرجوحة طول حبلها 7 m مربوطة بالسقف. ما سرعة الطفل عند أخفض نقطة يصل إليها إذا كانت أعلى نقطة تبعد 3 m من السقف؟



الشكل (19-5)

41-5 تبدأ آلة أتوود الموضحة بالشكل (19-5) الحركة من السكون عندما كانت $m_1=12$ kg على ارتفاع 3 m بالنسبة لـ $m_2=4$ kg. ما السرعة التي ستصل بها m_1 للأرض؟ (استخدم الطاقة).

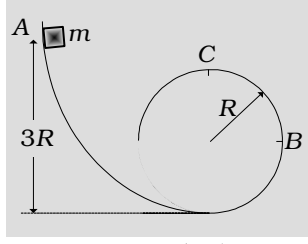
42-5 ينزلق جسم كتلته 2 kg بدءاً من السكون من النقطة A إلى النقطة B على الجزء الدائري الخشن من الطريق الموضح بالشكل (20-5) فيصلها بسرعة 4 m/s، ثم يتابع حركته على الجزء الأفقي الخشن ليقف عند C.



الشكل (20-5)

(أ) ما معامل الاحتكاك بين الجسم والطريق الأفقي إذا كان نصف قطر الجزء الدائري $h=1$ m؟ (ب) ما الشغل الضائع على الجزء الدائري من الطريق؟

43-5 تنزلق كتلة صغيرة m على السلك الدائري الموضح بالشكل (21-5) بدءاً من السكون عند A. (أ) ما التسارع المركزي

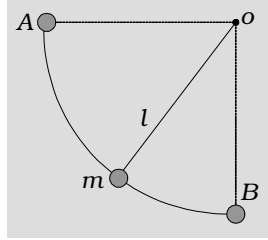


الشكل (5-21)

والمماسي لـ m عند B ؟ (ب) ما الطاقة الحركية للكتلة عند B ؟

5-44 ما أقل ارتفاع للنقطة A في المسألة السابقة حتى لا تقع الكتلة عند C ؟

5-45 تُسحب كتلة بندول بسيط m طوله l لوضع أفقي تماماً ثم تُترك لتُهوي في دائرة شاقولية، كما في الشكل (5-22). ما سرعة الكتلة عند النقطة B وما الشد في الخيط عندئذ؟



الشكل (5-22)

5-46 برهن أنه لو تحركت m في المسألة السابقة في دائرة كاملة فإن $T_D - T_C = 6mg$.

طاقة وضع قوة الجاذبية وسرعة الإفلات

5-47 تطلق قذيفة من سطح الأرض رأسياً نحو الأعلى بسرعة 10 km/s . ما أعلى ارتفاع تصل إليه؟

5-48 (أ) ماسرعة الإفلات من كوكب نصف قطره 500 km

وتسارع الجاذبية على سطحه 3 m/s^2 ؟ (ب) ما أعلى ارتفاع تصل إليه قذيفة أطلقت من سطح هذا الكوكب بسرعة رأسية 1 km/s ؟

5-49 يبلغ نصف قطر المريخ 3450 km وكتلته 0.11 من كتلة الأرض. (أ) ما الكثافة الكتلية للمريخ بالمقارنة مع الأرض؟ (ب) ماتسارع الجاذبية على سطح المريخ؟ (ج) ماسرعة الإفلات منه؟

5-50 ماقوة الجاذبية التي تخضع لها كتلة $m=1 \text{ kg}$ موضوعة بين كتلتين $m_1=0.2 \text{ kg}$ و $m_2=0.8 \text{ kg}$ بحيث تبعد 4 cm عن الأولى و 8 cm عن الثانية؟ (ب) ماطاقة وضع m ؟ (ج) ما الشغل اللازم لوضع m في ذلك الموضع؟

5-51 تُعطى قيمة وموضع ثلاث كتل في المستوي xy بحيث $m_1=20 \text{ kg}$ عند $(0,5,1)$ و $m_2=40 \text{ kg}$ عند $(-1,0,-1)$ و $m_3=60 \text{ kg}$ عند $(0,0,-0.5)$. (أ) ماقوة الجاذبية المؤثرة على جسيم كتلته 20 kg موضوع عند المبدأ؟ (ب) ماطاقة وضع هذا الجسم؟

5-52 يُطلق قمر صناعي من سطح الأرض نحو الأعلى فتصير سرعته 5 km/s على ارتفاع 100 km عندما ينفذ وقوده تماماً. إلى أي ارتفاع سيصل و ما سرعته عند عودته لسطح الأرض؟

53-5 يتجاذب نجمان متماثلان على بعد 10^{10} m من بعضهما بدءاً من السكون. (أ) ماسرعة كل منهما عندما يبعدان 5×10^9 m عن بعضهما؟ (ب) ماسرعة كل منهما قبل أن يتصادما مباشرة؟

54-5 تقع كتلتان ساكنتان m و M على بعد لانتهائي من بعضهما عندما تتحرك كل واحدة باتجاه الأخرى تحت تأثير قوة الجاذبية بينهما. برهن أن سرعة كل واحدة بالنسبة للأخرى عندما تصيران على بعد d من بعضهما هي $\sqrt{2G(m+M)/d}$.
القدرة

55-5 تسير سيارة على طريق أفقية بسرعة ثابتة 65 km/h خاضعة لقوى مقاومة محصلتها 500 N. مامعدل الطاقة الضائعة في الساعة ومن أين يتم تعويضها؟

56-5 يقوم طيار بتشغيل محرك طائرته الورقية الخفيفة برجليه فيولد قدرة متوسطة 0.32 W خلال الرحلة التجريبية التي يبلغ طولها 2.4 km بحيث تطير الطائرة بسرعة متوسطة 4 m/s. ما الطاقة التي يبذلها الطيار خلال هذه الرحلة؟

57-5 يرفع ثلاثة عمال عارضة خشبية وزنها 3000 N لسطح بناء ارتفاعه 30 m بواسطة رافعة مؤلفة من بكرة وحبل. ما الزمن اللازم لرفع العارضة إذا كانت قدرة كل عامل 200 W ومردود الرافعة 70% ؟

58-5 يُستعمل محرك قدرته 10 kW لرفع مصعد كتلته 1800 kg إلى ارتفاع 10 m. (أ) ما شغل المحرك إذا كان مردوده 60% ؟ (ب) ما الزمن اللازم لرفع المصعد؟

59-5 تستغرق طائرة DC-3 مدة 10 s لتصل لسرعة الإقلاع البالغة 100 km/h بدءاً من السكون. مامتوسط القدرة التي يعطيها محرك الطائرة إذا كانت كتلتها مع الركاب $11,000$ km؟

60-5 يشد حصان عربية كتلتها 300 kg على أرض خشنة مائلة بزواوية 8° للأعلى ويعطي قدرة تعادل حصاناً واحداً (745.7 W). ما أكبر سرعة يمكن أن تكسبها العربية إذا كان معامل الاحتكاك بينها وبين الأرض 0.12 وما الطاقة الضائعة التي يبذلها الحصان لمقاومة الجاذبية والاحتكاك؟